

10. Klasse • Mathematik

**DUDEN**

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

# Mathematik

10. KLASSE



Alles, was  
du wissen  
musst

# So lernst du mit diesem Buch:

## Wissen

Hier wiederholst du Schritt für Schritt, was du zu jedem Lernthema wissen musst, um richtig vorbereitet zu sein.

In der linken Spalte: Regeln und Arbeitsanleitungen

In der rechten Spalte: Beispiele und Veranschaulichungen

## Üben

Hier wendest du das Gelernte auf typische Übungsaufgaben an.

Damit du deinen Lernfortschritt selbst überwachen kannst, gibt es verschiedene Schwierigkeitsstufen:



Übungen zum Wiederholen des Lernstoffs



Übungen zu Standardaufgaben und für die nötige Sicherheit vor der Klassenarbeit



Übungen zu besonderen und anspruchsvolleren Problemen

## Wissen<sup>+</sup>

Diese Kästen geben dir zusätzliche Informationen, Tipps und Hinweise für das Bearbeiten der Übungen.

## Testen

Hier testest du dein Wissen mit vermischten und übergreifenden Aufgaben eines Kapitels.

### Klassenarbeit

Alle Lernthemen eines Kapitels werden wie in einer echten Klassenarbeit abgefragt.



45 Minuten

Die Minutenangabe sagt dir, wie viel Zeit du für die Bearbeitung einer Klassenarbeit hast.

DUDEN

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

# Mathematik

10. KLASSE

5., aktualisierte Auflage

**Dudenverlag**  
Berlin

**Redaktionelle Leitung** Juliane von Laffert

**Redaktion** Ulrike Klein

**Autoren und Autorinnen** Karin Hantschel, Katja Roth, Lutz Schreiner, Anna Speiser,  
Manuela Stein

**Herstellung** Ditte Hoffmann

**Layoutidee** Lilli Messina, Berlin

**Illustration** Carmen Strzelecki

**Grafik** pro.grafik, Ostfildern

**Umschlaggestaltung** 2issue, München

**Umschlagabbildung** Thomas Gilke

**Layout/technische Umsetzung** LemmeDESIGN, Berlin

[www.duden.de](http://www.duden.de)

[www.cornelsen.de](http://www.cornelsen.de)

5. Auflage, 1. Druck 2023

© 2023 Cornelsen Verlag GmbH, Berlin

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen.

Das Wort **Duden** ist für den Cornelsen Verlag GmbH als Marke geschützt.

Druck: H. Heenemann, Berlin

ISBN 978-3-411-72585-4



PEFC zertifiziert  
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig  
bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten  
Quellen.

[www.pefc.de](http://www.pefc.de)

1

## Quadratische Gleichungen und Funktionen

- 1.1 Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen ⇨ 5
- 1.2 Graphen quadratischer Funktionen ⇨ 10
- 1.3 Quadratwurzelgleichungen  
und Quadratwurzelfunktionen ⇨ 15
- Klassenarbeiten 1-2 ⇨ 18

2

## Potenzen und Potenzfunktionen

- 2.1 Potenzgesetze ⇨ 21
- 2.2 Rationale Exponenten – Wurzeln ⇨ 25
- 2.3 Eigenschaften von Potenzfunktionen ⇨ 28
- 2.4 Wurzelfunktionen und ihre Graphen ⇨ 33
- 2.5 Umkehrfunktionen ⇨ 37
- Klassenarbeiten 1-2 ⇨ 39

3

## Exponential- und Logarithmusfunktionen

- 3.1 Wachstums- und Zerfallsvorgänge ⇨ 43
- 3.2 Exponentialfunktionen ⇨ 47
- 3.3 Rechnen mit Logarithmen ⇨ 51
- 3.4 Exponential- und Logarithmgleichungen ⇨ 54
- 3.5 Logarithmusfunktionen ⇨ 58
- Klassenarbeiten 1-2 ⇨ 60

4

## Der Kreis

- 4.1 Umfang und Flächeninhalt ⇨ 63
- 4.2 Kreisbogen und Bogenmaß ⇨ 67
- Klassenarbeit 1 ⇨ 70

# Inhalt

5

## Raumgeometrie

- 5.1 Prisma und Zylinder ⇨ 72
- 5.2 Pyramide und Kegel ⇨ 74
- 5.3 Die Kugel ⇨ 78
- Klassenarbeit 1 ⇨ 82

6

## Trigonometrie

- 6.1 Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck ⇨ 84
- 6.2 Trigonometrische Funktionen ⇨ 88
- 6.3 Sätze und Anwendungen ⇨ 97
- Klassenarbeit 1 ⇨ 102

7

## Zufallsversuche und Wahrscheinlichkeiten

- 7.1 Wichtige Begriffe und Erwartungswert ⇨ 104
- 7.2 Bernoulli-Versuch und Bernoulli-Kette ⇨ 108
- Klassenarbeiten 1-2 ⇨ 114

8

## Ganzrationale Funktionen

- 8.1 Nullstellen ganzrationaler Funktionen ⇨ 116
- 8.2 Eigenschaften ganzrationaler Funktionen ⇨ 120
- Klassenarbeit 1 ⇨ 124

9

## Ableitung von Funktionen

- 9.1 Änderungsrate und Differenzenquotient ⇨ 125
- 9.2 Ableitung einer Funktion ⇨ 128
- 9.3 Ableitungsfunktion und Ableitungsregeln ⇨ 132
- 9.4 Untersuchung von Funktionen ⇨ 139
- Klassenarbeiten 1-2 ⇨ 145

Lösungen ⇨ 147

Stichwortfinder ⇨ 176

## 1 Quadratische Funktionen

### 1.1 Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

Eine Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  mit  $a \neq 0$  heißt **allgemeine Form** der quadratischen Gleichung.

Jede quadratische Gleichung kann in die **Normalform** übergeführt werden, indem jeder Summand durch  $a$  dividiert wird.

**Normalform:**  $x^2 + px + q = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Division durch  $a$  ergibt  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ .

Vereinfachen der Koeffizienten  $\frac{b}{a} = p$

und  $\frac{c}{a} = q$  führt auf die Normalform.

allgemeine Form:  $5x^2 + 10x + 5 = 0 \quad | : 5$

Normalform:  $x^2 + 2x + 1 = 0$

Die Gleichung  $x^2 = 0$  hat nur eine (doppelte) Lösung  $x_1 = x_2 = 0$ , d. h.,  $L = \{0\}$

**Rein quadratische Gleichungen:**

Gleichungen der Form  $x^2 - q = 0$ ;  $q > 0$  durch „Wurzelziehen“ lösen:

$$x^2 - q = 0 \quad | \text{3. binomische Formel}$$

$$(x + \sqrt{q})(x - \sqrt{q}) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{q}; x_2 = -\sqrt{q} \text{ d. h., } L = \{\sqrt{q}; -\sqrt{q}\}$$

Eine Abkürzung zu diesem Weg findest du im Wissen<sup>+</sup>-Kasten auf S. 7.

**Merke:** Falls  $q < 0$ , gibt es keine Lösung.

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 - 3^2 = 0$$

$$(x + 3) \cdot (x - 3) = 0$$

$$x_1 = -3; x_2 = 3;$$

$$\text{d. h., } L = \{-3; 3\}$$

**3. binomische Formel**

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Die Gleichung  $x^2 + 9 = 0$  hat keine Lösung; denn sie ist gleichbedeutend mit  $x^2 = -9$  und die Wurzel aus einer negativen Zahl ist nicht definiert.

**Gemischt quadratische Gleichungen:**

Gleichungen der Form  $x^2 + px = 0$  durch Faktorisieren („Ausklammern“) lösen:

$$x^2 + px = 0$$

$$x \cdot (x + p) = 0$$

$$x = 0 \text{ oder } x + p = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -p; \text{ d. h., } L = \{0; -p\}$$

**Gleichungen der Form  $x^2 + px + q = 0$**  versucht man mithilfe der 1. oder 2. binomischen Formel umzuformen. Dies ist nur möglich, wenn

$$q = \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

sonst muss man eine **quadratische Ergänzung** vornehmen. Dies geht so:

$$4x^2 + 12x = 0 \quad | : 4$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x \cdot (x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -3; \text{ d. h., } L = \{0; -3\}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \quad | \text{1. binom. Formel}$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$(x + 2) \cdot (x + 2) = 0$$

$$L = \{-2\}$$

**1. binomische Formel**

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

**2. binomische Formel**

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad | -q$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x = -q \quad | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadrat. Ergänzung)}$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | 1. \text{ binom. Formel}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = 0 \quad | 3. \text{ binom. Formel}$$

$$\left[\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right] = 0$$

Einer der Faktoren muss null sein:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0 \text{ oder}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$$

Es ergibt sich die Lösungsformel für die Normalform einer quadratischen Gleichung, die sogenannte **p-q-Formel**, mit der du quadratische Gleichungen in der Normalform lösen kannst:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$L = \{x_1; x_2\}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = D \text{ heißt } \mathbf{Diskriminante}.$$

D „entscheidet“ über die Anzahl der Lösungen.

**Beachte:** Eine quadratische Gleichung in der Form  $ax^2 + bx + c = 0$  musst du zuerst in die Normalform überführen (alle Summanden durch a dividieren), bevor du die p-q-Formel anwenden kannst!

Löse die Gleichung  $x^2 + 6x + 5 = 0$ .

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad | -5$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x = -5 \quad | + 3^2 \text{ (quadrat. Ergänzung)}$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 3^2 - 5 \quad | 1. \text{ binomische Formel}$$

$$(x + 3)^2 = 3^2 - 5$$

$$(x + 3)^2 - (3^2 - 5) = 0 \quad | 3. \text{ binomische Formel}$$

$$\left[(x + 3) + \sqrt{3^2 - 5}\right] \cdot \left[(x + 3) - \sqrt{3^2 - 5}\right] = 0$$

Einer der Faktoren muss null sein:

$$\left[(x + 3) + \sqrt{3^2 - 5}\right] = 0 \text{ oder}$$

$$\left[(x + 3) - \sqrt{3^2 - 5}\right] = 0$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{3^2 - 5} \quad x_2 = -3 - \sqrt{3^2 - 5}$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{4} = -1 \quad x_2 = -3 - \sqrt{4} = -5$$

$$L = \{-1; -5\}$$

Anzahl der Lösungen:

D = 0: eine Lösung

D > 0: zwei Lösungen

D < 0: keine reelle Lösung

$$6x^2 - 12x - 18 = 0 \quad | :6$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -\frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} = 1 + \sqrt{4} = 3$$

$$x_2 = -\frac{-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} = 1 - \sqrt{4} = -1$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$$



## 1 Quadratische Funktionen



Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungen. Verwende gegebenenfalls auch das Wissen aus dem Wissen<sup>+</sup>-Kasten unten.

a)  $x^2 - 16 = 0$

b)  $5a^2 = 25$

c)  $(y - 2) \cdot (y + 2) = 0$

d)  $u \cdot (u - 3) = 0$

e)  $7x^2 + 28x = 0$

f)  $4z^2 = 8z$

### Wissen<sup>+</sup>

#### Rechenabkürzung für $x^2 - q = 0$

Kennst du den Begriff „Betrag einer Zahl“, so verwende diesen kurzen Rechenweg:

$$x^2 = q$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{q}$$

$$|x| = \sqrt{q}$$

$$x_1 = +\sqrt{q}; x_2 = -\sqrt{q}; L = \{\sqrt{q}; -\sqrt{q}\}$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x| = \sqrt{25}$$

$$x_1 = +\sqrt{25}; x_2 = -\sqrt{25}; L = \{5; -5\}$$



Ein schmales rechteckiges Gartenstück hat die Seitenlängen 2,5m und 8,1m. Berechne in deinem Übungsheft die Seitenlängen eines quadratischen Gartenstücks, das den gleichen Flächeninhalt hat.

### Wissen<sup>+</sup>

#### Satz von Vieta

Sind  $x_1$  und  $x_2$  die Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ , so gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 \cdot x_2 = q$$

Mithilfe des Satzes von Vieta kannst du

- die **zweite Lösung** bestimmen, wenn dir eine Lösung bekannt ist (1),
- leicht eine **Probe** durchführen, wenn du die Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt hast (2),
- **p und q** berechnen, wenn du die Lösungen, aber nicht die Gleichung kennst. Damit kannst du schließlich eine **Gleichung aufstellen** (3).

(1) Bestimme die zweite Lösung der Gleichung  $x^2 + x - 6 = 0$ ; du kennst  $x_1 = 2$ .

$$\text{Es gilt: } 2 + x_2 = -1 \text{ und } 2 \cdot x_2 = -6;$$

$$\text{es folgt: } x_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

(2) Prüfe, ob  $x_1 = 7$  und  $x_2 = -1$  Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 - 6x - 7 = 0$  sind:

$$7 + (-1) = 6 \text{ und}$$

$$7 \cdot (-1) = -7$$

(3) Stelle eine quadratische Gleichung auf, deren Lösungen  $x_1 = 2$  und  $x_2 = 1,5$  sind.

$$2 + 1,5 = 3,5; \text{ also } p = -3,5 \text{ und}$$

$$2 \cdot 1,5 = 3; \text{ also } q = 3$$

Die Gleichung in der Normalform lautet:

$$x^2 - 3,5x + 3 = 0$$

3



Gegeben ist die Gleichung  $x_2 \cdot 8x \cdot 9 = 0$ . Eine Lösung ( $x_1 = -1$ ) ist bekannt. Bestimme mithilfe des Satzes von Vieta in deinem Übungsheft die zweite Lösung.



Löse die Gleichung mithilfe der quadratischen Ergänzung.

$$x^2 + 8x - 20 = 0 \quad | +$$

$$x^2 + 8x = 20 \quad | +$$

(quadratische Ergänzung)

$$x^2 + 8x + 16 = 20 + 16$$

(1. binomische Formel)

$$(x + \quad)^2 = 36 \quad | - 36$$

$$(x + \quad)^2 - 6^2 = 0$$

(3. binomische Formel)

$$[(x + 4) + \quad] \cdot [(x + 4) - \quad] = 0$$

$$[(x + 4) + \quad] = 0 \text{ oder } [(x + 4) - \quad] = 0$$

$$x = \quad \text{ oder } x = \quad$$

Übung 4

## 1 Quadratische Funktionen



Löse die Gleichungen mithilfe der quadratischen Ergänzung. Arbeite in deinem Übungsheft wie in Übung 4.

a)  $x^2 + 5x - 6 = 0$

b)  $x^2 + 8x = -12$

### Wissen+

#### Zerlegung in Linearfaktoren

Jede quadratische Gleichung der Form  $x^2 + px + q = 0$  mit den Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  lässt sich in **Linearfaktoren** zerlegen:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Diese Schreibweise einer quadratischen Gleichung heißt **Produktdarstellung**.

Zerlege die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 12 = 0 \text{ in Linearfaktoren.}$$

Mithilfe der p-q-Formel berechnest du:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 12}$$

$$x_1 = 0,5 + \sqrt{12,25} = 4$$

$$x_2 = 0,5 - \sqrt{12,25} = -3$$

Du erhältst:

$$x^2 - x - 12 = (x - 4) \cdot (x + 3) = 0$$



Löse die quadratischen Gleichungen mithilfe der p-q-Formel. Gib die quadratische Gleichung auch in Produktdarstellung an. Beachte: Gegebenenfalls musst du einen gemeinsamen Faktor vor der Zerlegung ausklammern.

a)  $x^2 + 6x + 5 = 0$

b)  $12x^2 - 24x = 36$

$$x^2 + 6x + 5$$

$$12x^2 - 24x - 36$$

$$= (x \quad ) \cdot (x \quad )$$

$$= 12 \cdot (x \quad ) \cdot (x \quad )$$

c)  $10x - 5 = 5x^2$

d)  $0,5x^2 - 0,5x - 10 = 0$

### 1.2 Graphen quadratischer Funktionen

Eine Funktion, deren Funktionsgleichung durch Äquivalenzumformungen in die Form  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) gebracht werden kann, heißt **quadratische Funktion**. Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**.

Schreibweisen:

*Allgemeine Form:*  $f(x) = ax^2 + bx + c$

*Normalform:*  $f(x) = x^2 + px + q$

*Scheitelpunktform:*  $f(x) = (x - d)^2 + e$

$f(x) = x^2$  ( $a = 1; b = 0; c = 0$ )

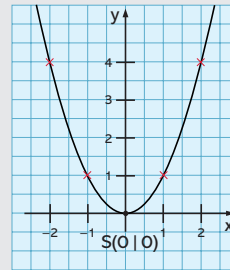
Der Graph dieser Funktion heißt **Normalparabel** und ist

- nach oben geöffnet,
- achsensymmetrisch zur y-Achse, d. h.,  $f(-x) = f(x)$ ,
- links von der y-Achse (also für  $x < 0$ ) monoton fallend, rechts von der y-Achse (also für  $x > 0$ ) monoton steigend.

**Scheitelpunkt:**  $S(0|0)$

S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

Graph zu  $f(x) = x^2$



x	f(x)
0	0
1	1
2	4

$f(x) = a \cdot x^2$

Der Graph entsteht durch **Stauchung** oder **Streckung** der Normalparabel um den Faktor a:

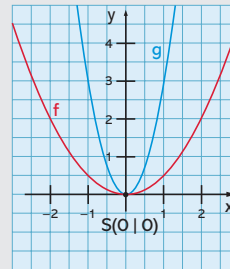
- für  $a > 1$ : **gestreckt** (Parabel enger)
- für  $0 < a < 1$ : **gestaucht** (Parabel weiter)

**Scheitelpunkt:**  $S(0|0)$

S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

Für  $a < 0$  ist der Graph zusätzlich zur Streckung oder Stauchung gespiegelt an der x-Achse. In diesem Fall ist S der **höchste Punkt** des Graphen.

Graphen zu  $f(x) = 0,5x^2$  und  $g(x) = 3x^2$



x	f(x)	g(x)	x <sup>2</sup>
0	0	0	0
1	0,5	3	1
2	2	12	4
-1	0,5	3	1

↙ ↘  
· 0,5

$f(x) = x^2 + c$

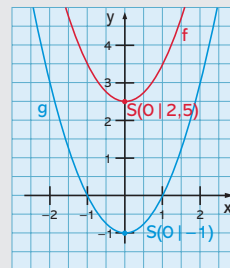
Der Graph entsteht durch **Verschiebung** der Normalparabel um c Einheiten **entlang der y-Achse**.

- Für  $c > 0$ : Verschiebung **nach oben**
- Für  $c < 0$ : Verschiebung **nach unten**

**Scheitelpunkt:**  $S(0|c)$

S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

Graphen zu  $f(x) = x^2 + 2,5$  und  $g(x) = x^2 - 1$



x	f(x)	g(x)	x <sup>2</sup>
0	2,5	-1	0
1	3,5	0	1
2	6,5	3	4
-1	3,5	0	1

↙ ↘  
+ 2,5

## 1 Quadratische Funktionen

$$f(x) = (x - d)^2$$

Der Graph entsteht durch **Verschiebung** der Normalparabel entlang der x-Achse.

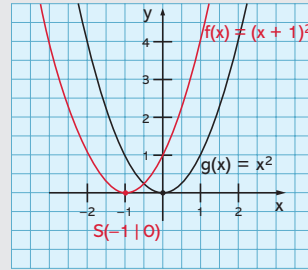
- Für  $d > 0$ : Verschiebung nach rechts
- Für  $d < 0$ : Verschiebung nach links

**Scheitelpunkt:**  $S(d | 0)$

**Merke:** Der Funktionsterm lässt sich in die Normalform überführen:

$$(x - d)^2 = x^2 - 2dx + d^2$$

Graph zu  $f(x) = (x + 1)^2$



x	f(x)	x <sup>2</sup>
0	1	0
1	4	1
2	9	4
-1	0	1

$$(x + 1)^2 = (x + 1) \cdot (x + 1) = x^2 + 2x + 1$$

**Scheitelpunktform:**  $f(x) = (x - d)^2 + e$

Der Graph entsteht durch Verschiebung der Normalparabel entlang der x-Achse und entlang der y-Achse.

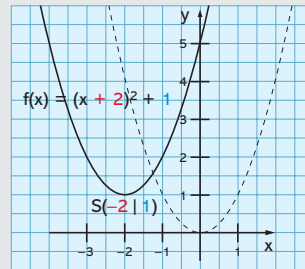
Du kannst den Scheitelpunkt der Parabel direkt aus dem Funktionsterm ablesen:

**Scheitelpunkt:**  $S(d | e)$

**Merke:** Der Funktionsterm lässt sich durch Ausmultiplizieren in die Normalform überführen:

$$(x - d)^2 + e = x^2 - 2dx + (d^2 + e)$$

Graph zu  $f(x) = (x + 2)^2 + 1$



x	f(x)
0	5
1	10
2	17
-1	2
-2	1

$$(x + 2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5$$

**Normalform:**  $f(x) = x^2 + px + q$

Hier kannst du den Schnittpunkt mit der y-Achse gut ablesen:  $S_y(0 | q)$ .

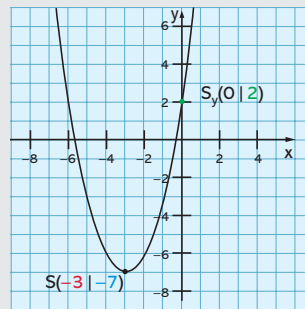
Die Normalform einer quadratischen Funktion kann in die Scheitelpunktform überführt werden:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

**Scheitelpunkt:**  $S\left(-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$

**Merke:** Du kannst den Scheitelpunkt also direkt aus der Funktionsgleichung ablesen.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 2 &= x^2 + 2 \cdot 3x + 2 + 3^2 - 3^2 \\ &= (x + 3)^2 + 2 - 3^2 \\ &= (x + 3)^2 - 7 \end{aligned}$$



**Allgemeine Form:**  $f(x) = ax^2 + bx + c$

Schnittpunkt mit der y-Achse:  $S_y(0 | c)$

**Scheitelpunkt:**  $S\left(-\frac{b}{2a} \mid \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Mit dieser Formel kannst du den Scheitelpunkt einer Parabel immer berechnen.

$f(x) = 2x^2 + 8x + 1$

$S\left(-\frac{8}{4} \mid \frac{4 \cdot 2 \cdot 1 - 8^2}{4 \cdot 2}\right)$

Scheitelpunkt:  $S(-2 | -7)$

# Üben

## 1 Quadratische Funktionen

### Übung 7



Gib zu jedem Funktionsterm den Scheitelpunkt S an. Ordne dann die Funktionsgleichungen den Graphen zu.

a)  $f_1(x) = x^2$

S(  |  )

Graph:

b)  $f_2(x) = x^2 + 2$

S(  |  )

Graph:

c)  $f_3(x) = 3x^2$

S(  |  )

Graph:

d)  $f_4(x) = -x^2$

S(  |  )

Graph:

e)  $f_5(x) = (x + 3)^2$

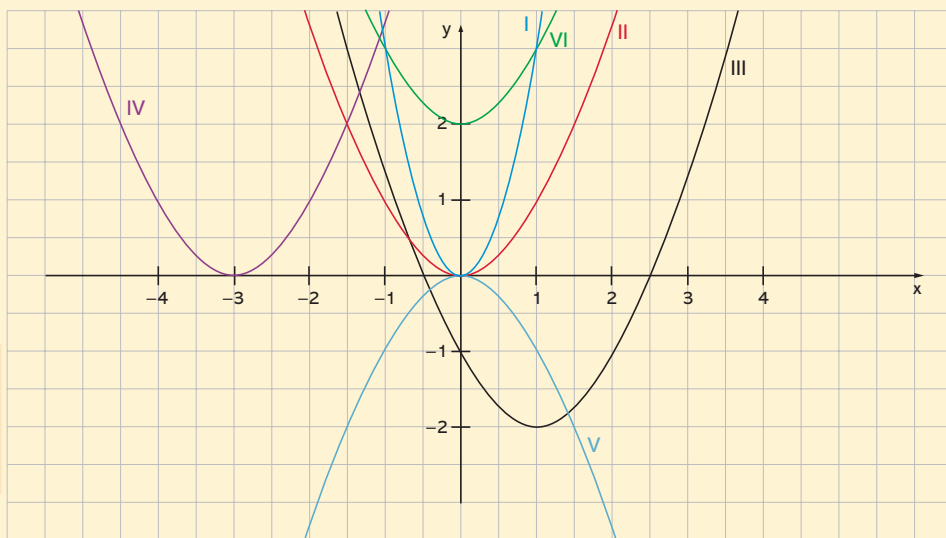
S(  |  )

Graph:

f)  $f_6(x) = (x - 1)^2 - 2$

S(  |  )

Graph:



### Übung 8



Erstelle zu jeder Funktion in deinem Übungsheft eine Wertetabelle und zeichne ihren Graphen. Gib jeweils auch den Scheitelpunkt an.

a)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$    b)  $g(x) = 2x^2 - 1$    c)  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$    d)  $i(x) = x^2 + 3x + 2,25$

### Übung 9



Forme die Funktionsgleichungen in die Scheitelpunktform um und gib den Scheitelpunkt an.

a)  $f(x) = 2x^2 + 8x + 10$    b)  $f(x) = 4x^2 + 20x - 16$    c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 12x + 72,25$

## 1 Quadratische Funktionen



Gegeben sind Wertetabellen von Funktionen. Zeichne die jeweiligen Graphen in dein Übungsheft und gib die zugehörigen Funktionsterme an.

a)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	f(x)	10	5	2	1	2	5	10

b)	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
	f(x)	1	-2	-3	-2	1	6	13

### Wissen<sup>+</sup>

#### Nullstellenbestimmung

$$f(x) = x^2 + px + q$$

Neben dem Scheitelpunkt und dem Schnittpunkt mit der y-Achse sind noch die Schnitt- und Berührungspunkte  $(x_1 | 0)$  und  $(x_2 | 0)$  des Funktionsgraphen mit der x-Achse von besonderem Interesse.

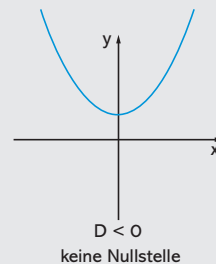
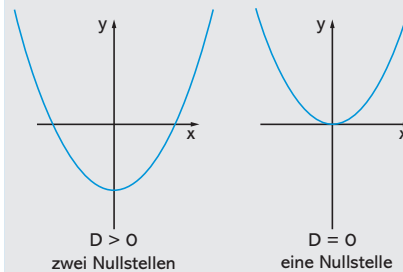
Die Werte  $x_1$  und  $x_2$  dieser Schnitt- oder Berührungspunkte heißen **Nullstellen** der Funktion.

Die Nullstellen sind also diejenigen x-Werte, für die die y-Koordinate null ist bzw. für die  $f(x) = 0$  gilt.

Zur Berechnung der Nullstellen einer quadratischen Funktion setzt man  $y = f(x) = 0$  und löst die entstandene quadratische Gleichung (→ Kap. 1.1).

Die Diskriminante  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  „entscheidet“ über die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung und somit auch über die Anzahl der Nullstellen einer quadratischen Funktion.

Aus der Anschauung des Funktionsgraphen wird klar: es gibt entweder eine, zwei oder keine Nullstelle:



# Üben

## 1 Quadratische Funktionen

Übung 11



Berechne die Nullstellen der Funktionen.

a)  $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b)  $f(x) = 4x^2 - 40x + 112$

c)  $f(x) = x^2 - 1,5x - 4,5$

Übung 12



Gegeben sind jeweils die Nullstelle(n) und der Scheitelpunkt des Graphen einer quadratischen Funktion. Gib den zugehörigen Funktionsterm an. Arbeite in deinem Übungsheft. Hinweis: Nutze die Scheitelpunktform und setze eine Nullstelle ein, um den Streckungsfaktor  $a$  zu bestimmen.

a)  $x_1 = 0; x_2 = 6$  S(3|-2)

b)  $x_1 = 2; x_2 = 6$  S(4|-1)

13



Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 2x^2 + 8x + 10k$ . Bestimme in deinem Übungsheft  $k$  derart, dass die Funktion eine (zwei bzw. keine) Nullstelle(n) besitzt.

Übung 14



Eine quadratische Funktion nimmt an der Stelle  $x = 2$  den Wert 3 an und hat ihr Minimum bei  $f(0) = -2$ . Bestimme in deinem Übungsheft die Funktionsgleichung für  $f(x)$ .



## 1 Quadratische Funktionen

### 1.3 Quadratwurzelgleichungen und Quadratwurzelfunktionen

#### Quadratwurzelgleichungen

Du erinnerst dich: Die **Quadratwurzel** (kurz: Wurzel) aus einer nicht negativen Zahl  $a$  ist diejenige nicht negative Zahl  $c$ , deren Quadrat  $a$  ergibt:  $c^2 = a$   
Wir schreiben für  $c$  auch:  $c = \sqrt{a}$

$$(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9$$

**Wurzel** aus 9 ist diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat 9 ergibt.

Eine Gleichung, in der die Variable unter einem Wurzelzeichen vorkommt, heißt **Wurzelgleichung**.

$$\sqrt{x+7} - 3 = 0; D = \{x \mid x \geq -7\}$$

$$8 - \sqrt{x-60} = 0; D = \{x \mid x \geq 60\}$$

**Vorsicht:** Der Term unter der Wurzel darf nie kleiner als null werden! Du musst also genau auf die Definitionsmenge achten!

#### Wurzelgleichungen in 4 Schritten lösen:

1. Wurzel **isolieren**;
2. beide Seiten der Gleichung **quadrieren**;
3. Variable (oder weitere Wurzel) **isolieren**;
4. **Probe** durchführen; Lösungsmenge angeben.

$$\sqrt{x+7} - 3 = 0 \quad | + 3 \text{ (Wurzel isolieren)}$$

$$\sqrt{x+7} = 3 \quad | \text{quadrieren}$$

$$x+7 = 9 \quad | -7 \text{ (Variable isolieren)}$$

$$x = 2$$

$$L = \{2\}$$

**Vorsicht:** Die Probe musst du durchführen, da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist. Du kannst „Ergebnisse“ erhalten, die die Gleichung nicht lösen!

$$\text{Probe: } \sqrt{2+7} - 3 = 0$$

Kommen mehrere Wurzeln vor, so musst du das Schema isolieren, quadrieren, isolieren, quadrieren, ... mehrfach anwenden.

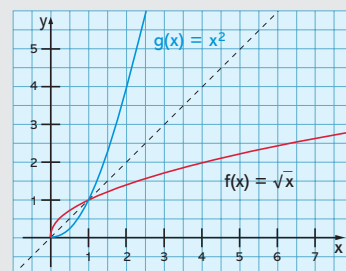
Die Gleichung  $\sqrt{x-6} + 2 = 0$  hätte nach dem obigen Schema berechnet die „Lösung“  $x = 10$ ; dies ist aber keine Lösung der Gleichung. Führe die Probe in der Ausgangsgleichung durch:  $2 + 2 \neq 0$ .

#### Die Quadratwurzelfunktion

##### Die Quadratwurzelfunktion

$f(x) = \sqrt{x}$ ;  $x \geq 0$  ist die Umkehrfunktion zu  $g(x) = x^2$  für  $x \geq 0$ .

Der Graph der Quadratwurzelfunktion ist im Bereich nicht negativer  $x$ -Werte achsensymmetrisch zum Graphen der Funktion  $g(x) = x^2$ . Symmetrieachse ist die Winkelhalbierende des 1. Quadranten ( $\nearrow$  Kap. 2.4).



# Üben

## 1 Quadratische Funktionen

\*

Vereinfache die Wurzelterme.

a)  $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

b)  $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})$

c)  $(\sqrt{5} + 6 \cdot \sqrt{8}) \cdot (\sqrt{5} - 6 \cdot \sqrt{8})$

d)  $\sqrt{110} - \sqrt{11} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{11})$

e)  $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2$

f)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

\*

Gib die Definitionsmenge der Terme an.

a)  $\sqrt{12 - 3x}$

D = {x | \_\_\_\_\_ }

b)  $\sqrt{16 - x^2}$

D = {x | \_\_\_\_\_ }

c)  $\sqrt{2x + 19}$

D = {x | \_\_\_\_\_ }

\*\*

Berechne die Lösungsmenge. Führe eine Probe durch.

a)  $\sqrt{x} = 9$

L = { \_\_\_\_\_ }

b)  $4 = \sqrt{6 + 4x}$

L = { \_\_\_\_\_ }

c)  $5 + 4 \cdot \sqrt{2 - 3x} = 21$

L = { \_\_\_\_\_ }

d)  $\sqrt{3x + 4} = \sqrt{2x + 8}$

L = { \_\_\_\_\_ }

e)  $x + 3 = \sqrt{x^2 + 18}$

L = { \_\_\_\_\_ }

f)  $2x + 2 \cdot \sqrt{4x^2 - 6} = 0$

L = { \_\_\_\_\_ }

\*\*

Berechne die Lösungsmenge durch mehrfaches Quadrieren.  
Schreibe in dein Übungsheft.

a)  $\sqrt{4x + 9} = 1 + 2 \cdot \sqrt{x}$

b)  $\sqrt{10 - x} = 4 - \sqrt{x}$

c)  $3 + \sqrt{x - 21} = \sqrt{x}$

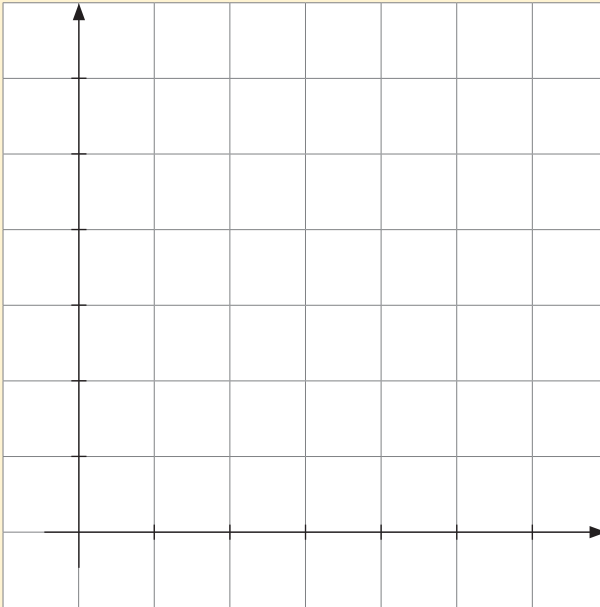
## 1 Quadratische Funktionen



Zeichne mithilfe einer Wertetabelle den Graphen der Funktion  $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ . Lies aus dem Graphen ab, für welche Werte  $f(x) = x$  gilt.

Wertetabelle:

x	0	0,5	1	2	3	4	5
f(x)							



Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungen für beliebiges  $t \in \mathbb{R}$ .  
Gib an, für welche Werte von  $t$  die Gleichung lösbar ist.

a)  $\sqrt{x} - t = 0$

$L = \{ \quad \}$

$t \geq \quad$

b)  $\sqrt{x} = -t$

$L = \{ \quad \}$

$t \quad$

c)  $\sqrt{x+2} - t = 0$

$L = \{ \quad \}$

$t \quad$

# Testen

## 1 Quadratische Funktionen

### Klassenarbeit 1



60 Minuten

Aufgabe 1



Bestimme die Lösungsmenge. Durch „genaues Hinschauen“ kannst du sehr schnell die Lösungsmenge angeben.

a)  $x^2 = 25$

L = {  }

b)  $3x^2 = -60$

L = {  }

c)  $(x - 5)^2 = 36$

L = {  }

d)  $4 \cdot (x + 2)^2 = 64$

L = {  }

e)  $x^2 - 8x = 0$

L = {  }

f)  $x^2 = \frac{4}{36}$

L = {  }

2



Löse die Gleichungen mithilfe der quadratischen Ergänzung. Bringe die Gleichungen gegebenenfalls zuerst in die Normalform.

a)  $x^2 + 6x + 8 = 15$

b)  $2x^2 - 40 = 16x$

3



Löse die Gleichungen mithilfe der p-q-Formel.

a)  $x^2 + 2x - 8 = 0$

b)  $-y^2 + y + 6 = 0$

c)  $u^2 = 4u - 3$

d)  $(x - 1)(x + 1) = 2x$

e)  $(x + 1)(x - 3) = 5$

Aufgabe 4



Gib die Informationen an, die man aus den Funktionsgleichungen ablesen kann.

Funktion Parabel	$f(x) = x^2 - 2$	$g(x) = -\frac{1}{2}x^2$	$h(x) = (x - 3)^2 + 2$
Scheitelpunkt			
Schnittpunkte mit der x-Achse			
nach oben/ unten geöffnet			
weiter/enger als Normalparabel			
Schnittpunkt mit y-Achse			

## 1 Quadratische Funktionen

- \*\*** Zeichne die Graphen der angegebenen Funktionen. Überlege zunächst, welche Informationen aus der Funktionsgleichung dir beim Zeichnen behilflich sein können (vgl. Aufgabe 4).

a)  $f(x) = 2x^2 - 1$                       b)  $g(x) = (x + 1)^2 + 1$   
 c)  $h(x) = (x - 2)(x + 3)$               d)  $i(x) = x^2 - 5x - 6$

5

- \*\*** Zerlege den quadratischen Term in Linearfaktoren.

a)  $x^2 + 2x - 15$                       b)  $x^2 - 3$                       c)  $3x^2 + 2x - 1$

6

- \*\*** Bestimme die Lösungsmenge der Wurzelgleichungen.

a)  $\sqrt{x} = 8$                       b)  $\sqrt{x} = -9$                       c)  $3 \cdot \sqrt{x - 4} = 3$   
 L = {  }                      L = {  }                      L = {  }  
 d)  $\sqrt{4x - 4} = x - 1$               e)  $2\sqrt{x + 6} = \sqrt{x - 1} + 5$               f)  $\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 3x + 4$   
 L = {  }                      L = {  }                      L = {  }

Aufgabe 7

- \*\*** Zeichne die Graphen der hier angegebenen Wurzelfunktionen in dein Übungsheft. Bestimme zunächst die Definitionsmenge. Hinweis: Nutze eine Wertetabelle, um einzelne Punkte einzuzeichnen.

a)  $f(x) = \sqrt{x}$                       b)  $g(x) = \sqrt{x - 2}$                       c)  $h(x) = 2 \cdot \sqrt{x - 2}$   
 d)  $i(x) = 2 \cdot \sqrt{x - 2} + 1$               e)  $j(x) = -2 \cdot \sqrt{x - 2}$                       f)  $k(x) = \sqrt{x + 3}$

Aufgabe 8

- \*\*** Erläutere, wie man aus dem Graphen der Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  den Graphen der Wurzelfunktion  $f(x) = a \cdot \sqrt{x - b} + c$  erhält, d.h., wie sich a, b und c auf den Graphen der jeweiligen Wurzelfunktion auswirken. Hinweis: Nutze die Ergebnisse aus Aufgabe 8.

9

- \*\*** Beantworte die Fragen zur quadratischen Gleichung.

- a) Warum hat die Gleichung  $x^2 + 80 = 0$  keine Lösung?  
 b) Hat die Gleichung  $x^2 - bx = 0$  immer eine Lösung?  
 c) Für welche Werte von c hat die Gleichung  $x^2 = c$  zwei Lösungen?  
 Für welche Werte existiert nur eine bzw. keine Lösung?

10

- \*\*\*** Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist 313. Bestimme die gesuchten Zahlen.

11

# Testen

## 1 Quadratische Funktionen

### Klassenarbeit 2



70 Minuten

\*

Bestimme die Lösungen der Gleichungen möglichst geschickt.

a)  $4x^2 - 324 = 0$

b)  $64x^2 = 9$

c)  $(x - 4)(x + 5) = 0$

d)  $1,7x^2 - 8,5x = 0$

e)  $-4x^2 = 48$

f)  $7(x - 3,5)^2 = 63$

\*

Gib die Anzahl der Lösungen an.

a)  $x^2 - 3 = 0$

b)  $x^2 - 16x + 64 = 0$

c)  $x^2 - 49 = 0$

d)  $x^2 + 49 = 0$

e)  $3(x - 2)^2 + 12 = 0$

f)  $(x - 1)^2 = 0$

\*\*

Berechne die Lösungen der Gleichungen.

a)  $x(x + 2) + 4 = (x + 2)^2 - 6x$

b)  $-x(12x - 72) = 60$

\*\*

Löse die Aufgaben zu den Graphen der folgenden quadratischen Funktionen.

1)  $f(x) = (x + 2)^2$

2)  $f(x) = 2(x - 3)^2 - 1,5$

3)  $f(x) = x^2 + 4x + 6$

a) Ermittle die Koordinaten der Scheitelpunkte.

b) Berechne die Nullstellen der Graphen.

c) Zeichne die Graphen der Funktionen. Überprüfe, ob du die Nullstellen richtig berechnet hast.

\*\*

Berechne die Lösungsmenge.

a)  $\sqrt{x} = 16$

b)  $5 = \sqrt{10 + 5x}$

c)  $\sqrt{8x - 5} = \sqrt{3x + 5}$

d)  $3x - 2\sqrt{9x^2 - 27} = 0$

\*\*\*

Bestimme die Gleichung der Funktion  $f(x) = x^2 + px + q$ , die durch die Punkte R und S verläuft.

a) R(3 | -13); S(4 | 9)

b) R(-2 | 4); S(3 | 10)

c) R(1 | 4); S(5 | 4)

\*\*\*

Multipliziert man das Quadrat der Summe aus einer Zahl  $x$  und 35 mit 9, erhält man 12321. Berechne die Zahl  $x$ .

\*\*\*

Die Seiten eines Rechtecks verhalten sich wie 4:7, der Flächeninhalt beträgt  $448\text{cm}^2$ . Berechne die Seitenlängen des Rechtecks.

12

13

14

Aufgabe 15

16

17

18

19

# Stichwortfinder

- A** Ableitung 128
  - von Sinus und Kosinus 134
- Ableitungsfunktion 132
- Ableitungsregeln 132
- Additionstheoreme 96
- Amplitude 92
- Änderungsrate 43, 125
  - lokale 128
  - mittlere 128
- Arkuskosinus 86
- Arkussinus 86
- Arkustangens 86
- Aufriss 78
- B** Bernoulli-Kette 108
- Bernoulli-Versuch 108
- Binomialkoeffizient 108
- Bogenmaß 67
- C** Cavalieri, Satz des 76, 78
- D** Differentialquotient 128
- Differenzenquotient 125
- Differenzierbarkeit 129
- Diskriminante 6, 13
- Dreieck
  - allgemeine Flächeninhaltsformel 101
  - rechtwinkliges 84
- Dreiecksstücke 97
- E** Eineindeutig 37
- Einheitskreis 88
- Ereignis 104
- Erwartungswert 105
  - einer Bernoulli-Kette 112
- eulersche Zahl 58
- Exponentenvergleich 54
- Exponentialfunktionen 47
  - Graphen 47
  - Streckung und Stauchung 49
  - Verschiebung 49
- Exponentialgleichungen 54
  - lösen durch Logarithmieren 54
- Extrempunkte 139, 142
- Extremwertprobleme 141
- F** Frequenz 92
- ganzrationale Funktionen 116
  - Eigenschaften 120
  - Extremstellen 122
  - Monotonie 120
  - Nullstellen 116
  - Symmetrien 120
  - Wendepunkte 122
- G** Gleichungen, quadratische 5
- Grundriss 78
- H** Häufigkeit, relative 104
- Hyperbel 28
- Hypotenuse 84
- I** Intervallschachtelung 27
- K** Katheten 84
- Kegel 74
- Kegelstumpf 77
- Kosinus 84
  - Funktionswerte 99
- Kosinusfunktion 89
- Kosinussatz 96
- Kreis 63
- Kreisabschnitt 69
- Kreisausschnitt 67
- Kreisbogen 67
- Kreisring 63
- Kreis Sektor 67
- Kreiszahl  $p$  63
  - näherungsweise Berechnung 66
- Kugel 78
- Kugelabschnitt 79
- Kugelausschnitt 79
- Kugelkappe 79
- Kugelschicht 79
- Kugelsektor 79
- Kugelzone 79
- Kurvendiskussion 140
- L** Linearfaktoren 9, 117
- Logarithmus 51
  - dekadischer 58
- Logarithmengesetze 51
- Logarithmgleichungen 55
- Logarithmenfunktionen 58
- M** Monotoniekriterium 135
- N** Normalparabel 10
- P** Parabeln 10, 28
- pascalsches Dreieck 108
- Phasenverschiebung 92
- Potenzen 21
  - mit irrationalen Exponenten 27
  - mit rationalen Exponenten 25
- Potenzen und Wurzeln 25
- Potenzfunktionen 28
  - Stauchung und Streckung 31
  - Umkehrfunktionen 37
- Potenzgesetze 21, 25
- Potenzgleichungen lösen 32
- p-q-Formel 6
- Prisma 72
- Pyramide 74
- Pyramidenstumpf 77
- Q** quadratische Ergänzung 5
- quadratische Funktionen
  - Graphen 10
  - Nullstellen 13
- quadratische Gleichungen 5
  - Produktdarstellung 9
- Quadratwurzelfunktion 15
- Quadratwurzelgleichung 15
- S** Scheitelpunkt einer Parabel 10
- Scheitelpunktform 11
- Sinus 84
  - Funktionswerte 99
- Sinusfunktion 89
  - allgemeine 94
- Sinussatz 96
- Standardabweichung 107
- einer Bernoulli-Kette 112
- Steigungswinkel, Ermittlung mit Ableitung 137
- T** Tangens 85
- Tangensfunktion 91
- trigonometrische Funktionen 88
- U** Umkehrfunktionen 37
- V** Vieta, Satz von 8
- Vorrangregeln 21
- W** Wachstum, exponentielles 43
- Wachstum, lineares 43
- Wachstumsvorgänge 43
- Wahrscheinlichkeiten 109, 110
- Wendepunkte 140, 143
- Winkelfunktionen 88
- Wurzelfunktionen 33
  - Graph 36
- Wurzelgesetze 25
- Wurzelgleichung 15
- Wurzeln und Potenzen 25
- Z** Zerfallsvorgänge 43
- Zufallsgrößen 105
- Zufallsversuch 104
- Zylinder 72

## Erfolgreich am Gymnasium mit drei Lernbausteinen:

### WISSEN

Hier findest du alle wichtigen Regeln mit passenden Beispielen zum Wiederholen und Schließen deiner Lernlücken.

### ÜBEN

Abwechslungsreiche Übungsaufgaben in drei Schwierigkeitsstufen helfen dir beim individuellen Trainieren.

### TESTEN

In mehreren Klassenarbeiten zu jedem Thema kannst du deinen Wissensstand und Lernerfolg kontrollieren.

**Der komplette Lernstoff des Schuljahrs.  
Berücksichtigt die aktuellen Bildungspläne der Bundesländer.**



ISBN 978-3-411-72585-4  
15 € (D) · 15,50 € (A)



9 783411 725854

[www.duden.de](http://www.duden.de)