

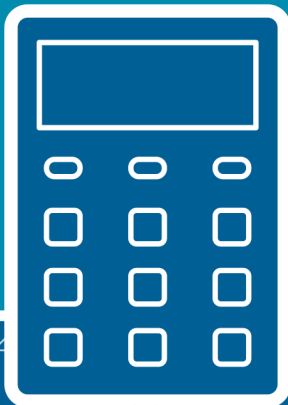
Gymnasium · 9. Klasse  
Mathematik

**DUDEN**

BESSER IN

# Mathematik

## 9. KLASSE



Mit  
Lösungs-  
heft

# Duden

Alexander Spahn

BESSER IN

# Mathematik

## 9. KLASSE

GYMNASIUM

### **Über den Autor:**

Alexander Spahn unterrichtet Mathematik und Physik an einem Gymnasium.

### **Bildquellen:**

mpanch/shutterstock.com S. 6

### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Das Wort **Duden** ist für den Verlag Bibliographisches Institut GmbH als Marke geschützt.

Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Alle Rechte vorbehalten.

Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet.

### **2. Auflage**

© Cornelsen Scriptor 2012; Nachdruck Duden 2020 H G F

Bibliographisches Institut GmbH

Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Redaktionelle Leitung: Constanze Schöder

Redaktion: Dr. Angelika Fallert-Müller

Illustrationen: Rainer J. Fischer

Herstellung: Annette Scheerer

Layoutkonzept: Horst Bachmann, Weinheim

Umschlaggestaltung: 2issue, München

Umschlagillustration: bsd/Shutterstock.com (Taschenrechner),

Imichman/Shutterstock.com (Textur)

Satz/Layout: Dagmar Lemme, Berlin

Druck und Bindung: AZ Druck und Datentechnik GmbH,

Heisinger Straße 16, 87437 Kempten

Printed in Germany

ISBN 978-3-411-87086-8

<b>Vorwort</b> .....	5
<b>1 Quadratische Funktionen</b> .....	6
1.1 Die Taste $x^2$ auf dem Taschenrechner .....	6
1.2 Beispiele quadratischer Funktionen .....	7
1.3 Verschiebungen der Normalparabel .....	8
1.4 Streckungen, Stauchungen, Spiegelungen der Normalparabel .....	16
1.5 Verschiedene Aufgaben zu quadratischen Funktionen .....	21
<b>Test</b> .....	27
<b>2 Quadratische Gleichungen</b> .....	28
2.1 Nullstellen von quadratischen Funktionen .....	28
2.2 Sätze über quadratische Gleichungen .....	32
2.3 Quadratische Gleichungen vom Typ $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0$ ) .....	35
2.4 Schnittstellen von Parabeln und Geraden .....	36
2.5 Gleichungen höheren Grades .....	38
<b>Test</b> .....	40
<b>3 Potenzen und Wurzeln</b> .....	41
3.1 Die Teile eines Potenzterms .....	41
3.2 Normdarstellung für große Zahlen („scientific notation“) .....	42
3.3 Potenzgesetze .....	43
3.4 Potenzen mit negativer Basis .....	45
3.5 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten .....	46
3.6 Potenzen mit rationalen Exponenten und „höhere“ Wurzeln .....	48
3.7 Graphen von Potenzfunktionen .....	52
<b>Test</b> .....	56
<b>4 Kreis und Kreisausschnitt</b> .....	57
4.1 Umfang und Flächeninhalt des Kreises .....	57
4.2 Kreisausschnitt und Kreisbogen .....	61
<b>Test</b> .....	62
<b>5 Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel</b> .....	64
5.1 Netze und Oberflächen .....	64
5.2 Volumen von Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel .....	67
5.3 Spezielle Arten von Aufgaben .....	71
<b>Test</b> .....	75

## Inhaltsverzeichnis

<b>6</b>	<b>Trigonometrische Funktionen</b> .....	76
6.1	Trigonometrische Funktionen am rechtwinkligen Dreieck .....	76
6.2	Sinussatz und Kosinussatz .....	87
6.3	Trigonometrie in der Physik .....	93
	<b>Test</b> .....	95
<b>7</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	96
7.1	Vierfeldertafeln .....	96
7.2	Drei Formeln zur Wahrscheinlichkeit/Der Satz von Bayes .....	103
	<b>Test</b> .....	108
	<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	110
	<b>Verzeichnis der Abkürzungen</b> .....	112

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieser Band der Reihe „Besser in Mathematik“ hilft dir, deine Kenntnisse im Fach Mathematik zu verbessern. Du kannst gezielt Stoff nachholen und wiederholen, um sicherer zu werden! Zu allen Bereichen des Mathematikunterrichts sind kleine Aufgaben angeboten, mit denen du selbstständig arbeiten kannst.

Die Schwerpunkte sind:

- ▷ Definitionen und Regeln kennen und anwenden,
- ▷ Aufgaben strukturieren und strategisch bearbeiten,
- ▷ Diagramme und Formeln erstellen und interpretieren,
- ▷ Zusammenhänge begründen und überprüfen.

Die Texte und die Aufgaben in diesem Buch sind so ausgewählt und zusammengestellt, dass dir die Bearbeitung möglichst leichtfällt.

## TIPPS UND INFOS

### Zum Arbeiten mit diesem Buch

- ▶ Lege dir ein **eigenes Arbeitsheft** zu, in das du schreibst.
- ▶ Bist du dir beim Lösen der Übungsaufgaben nicht ganz sicher, sieh dir die Beispiele noch einmal genau an.
- ▶ Vergleiche deine Ergebnisse mit denen im Lösungsheft. Überprüfe bei Fehlern immer genau, was du falsch gemacht hast. Korrigiere Fehler.
- ▶ Am Ende eines jeden Kapitels kannst du in einem kleinen Test überprüfen, ob du den Stoff nun beherrschst. Wenn nicht, bearbeite die entsprechenden Aufgaben in einigen Tagen noch einmal.

Viel Spaß und Erfolg beim Lernen!

# 1 Quadratische Funktionen

## WAS DU SCHON KÖNNEN MUSST

- ▷ Mithilfe der binomischen Formeln eine Summe in ein Produkt verwandeln

## DARUM GEHT ES

- ▷ Beurteilen, wie bestimmte Veränderungen im Funktionsterm einer quadratischen Funktion den Graphen dieser Funktion verändern
- ▷ Aus der Gleichung einer quadratischen Funktion von der Form  $y = ax^2 + bx + c$  den Verlauf des Graphen der Funktion skizzieren
- ▷ Zu einem vorgegebenen Graphen einer quadratischen Funktion die passende Gleichung finden
- ▷ Einfache Extremwertprobleme lösen

**Info:** Du benötigst einen technisch-wissenschaftlichen Taschenrechner.

## 1.1 Die Taste $x^2$ auf dem Taschenrechner

### TIPPS UND INFOS

Dein technisch-wissenschaftlicher Taschenrechner hat außer

- ▶ den Eingabetasten für die Zahlen  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$ ,  $\boxed{3}$  usw. und
- ▶ den Tasten für die Grundrechenarten  $\boxed{+}$ ,  $\boxed{-}$  usw.
- ▶ eine Reihe von sogenannten Funktionstasten wie z. B.  $\boxed{\sin}$ ,  $\boxed{\log}$ ,  $\boxed{\text{LN}}$  usw.  
Eingabe → Funktionstaste → Ausgabe

Wenn du die Bedeutung und die Anwendung einiger dieser „Funktionen“ noch nicht kennst, sind die Tasten für dich „schwarze Kästen“ oder „black boxes“, die zu jedem Eingabewert einen Ausgabewert erzeugen.

Der Einfachheit halber heißen die Eingabewerte auch „ $x$ -Werte“, die Ausgabewerte heißen „ $y$ -Werte“, die Funktionstaste oder Funktion heißt „ $f$ “:

$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow y$  oder  $y = f(x)$ ; Sprechweise:  
„ $y$  ist der Funktionswert von  $x$ .“



## 1.2 Beispiele quadratischer Funktionen

### DAS MUSST DU WISSEN

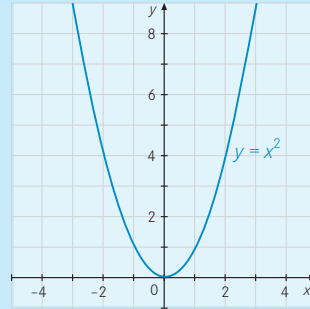
### Die Funktionstaste $x^2$

Du kannst bei dieser Taste systematisch ausprobieren, welche Ausgabewerte bei einzelnen Eingabewerten erscheinen; dann schreibst du die Werte in einer **Zuordnungstabelle** auf. Du könntest auch Zwischenwerte, z. B. 2,71 oder  $-0,683$ , eingeben.

$$y = x^2$$

Eingabe	$x$	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
Ausgabe	$y$	9	4	1	0	1	4	9

Um die Zuordnung in dieser Tabelle zu veranschaulichen, kannst du die Wertepaare nun im Koordinatensystem darstellen. Wenn du die Punkte miteinander verbindest, entsteht eine Kurve, der sogenannte **Funktionsgraph**.



### Die Normalparabel

Diese Kurve ist gewissermaßen der „Fingerabdruck“ der Funktionstaste  $x^2$  im Koordinatensystem; man nennt diese spezielle Kurve auch **Normalparabel**.

**Tipp:** Wenn du diesen Graphen zeichnen willst, kannst du auch eine Parabelschablone benutzen.

### 1 Ergänze die Tabelle zur Funktion $y = x^2$ .

$x$	1,8	-0,12	-3,9	-11,35
$y$		0,0144		

## 1.2 Beispiele quadratischer Funktionen

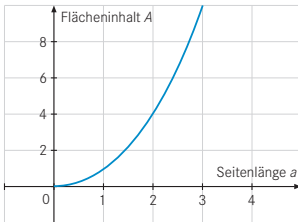
**Julia:** Heute habe ich folgende Mathe-Hausaufgabe: Zu Quadraten mit Seitenlängen von 1 cm bis 4 cm soll ich den Flächeninhalt ausrechnen und das Diagramm dieser Zuordnung zeichnen. Die Gleichung der Zuordnung ist  $A = a^2$ .

**Christopher:** Wir haben in Physik den freien Fall untersucht: Wie viele Meter fällt ein Gegenstand in 1, 2, 3 usw. Sekunden? Die Gleichung für den freien Fall heißt übrigens  $s = 5t^2$ , wenn du den Weg  $s$  in Metern und die Zeit  $t$  in Sekunden misst.

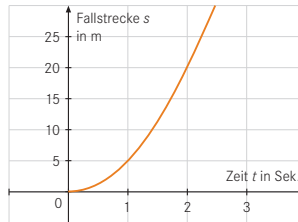
**Herr Engel:** Für die Feststellung der Geschwindigkeit eines Autos aus dem Bremsweg gibt es Tabellen und Diagramme. Die Gleichung, mit der ich den Bremsweg  $s$  bei der Geschwindigkeit  $v$  ausrechnen kann, ist  $s = 0,006 v^2$ .



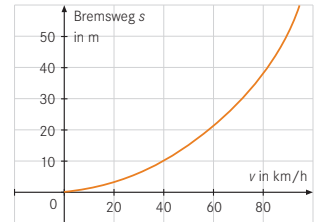
$a$	1	2	3	4
$A$	1	4	9	16



$t$	1	2	3	4
$s$	5	20	45	80



$v$	20	40	60	80
$s$	2,4	9,6	21,6	38,4



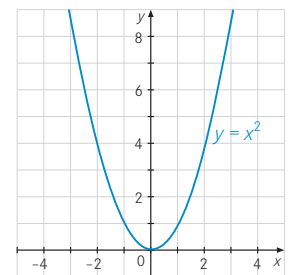
Die Kurven ähneln offenbar der Normalparabel  $y = x^2$ , die du im ersten Abschnitt gezeichnet hast.

- ▷ Die Gleichung der Zuordnung in Julias Hausaufgabe heißt  $A = a^2$ ; hier ist also nur  $y$  durch  $A$  und  $x$  durch  $a$  ersetzt. Da aber die Länge  $a$  keine negativen Werte annehmen kann, hat Julia nur eine „halbe Parabel“ gezeichnet.
- ▷ Die Gleichung zu Christophers Diagramm heißt nicht nur  $s = t^2$ , sondern  $s = 5t^2$ ; sie enthält also noch den Faktor 5.
- ▷ Bei Herrn Engel findest du vor der Variablen  $v^2$  den Faktor 0,006. Da es weder Zeiten noch Geschwindigkeiten mit Vorzeichen „minus“ gibt, sind auch die Kurven bei Christopher und Herrn Engel nur „halbe“ Parabeln.

### 1.3 Verschiebungen der Normalparabel

#### Verschiebungen in Richtung einer Achse

In diesem Abschnitt geht es speziell um die Funktion mit der Gleichung  $y = x^2$ . Wie verändert sich dieser **Graph**, wenn du bestimmte **Veränderungen an der Funktionsgleichung**  $y = x^2$  vornimmst?



#### TIPPS UND INFOS

#### Graphen linearer Funktionen

Eine ähnliche Fragestellung kennst du auch schon von „linearen Funktionen“:

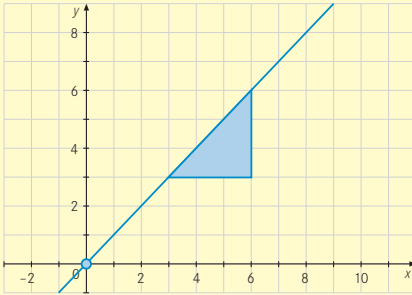
Die einfachste lineare Funktion ist die Funktion  $y = x$ .

Du kannst nun an dieser Gleichung kleine Veränderungen vornehmen und beobachten, wie sich dadurch der Graph verändert.

## 1.3 Verschiebungen der Normalparabel

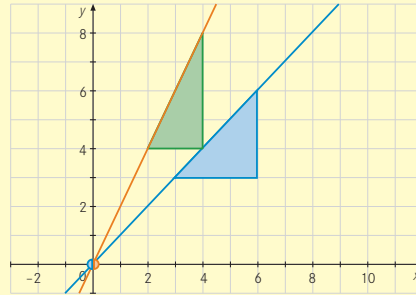
Beispiele:

$$y = x$$



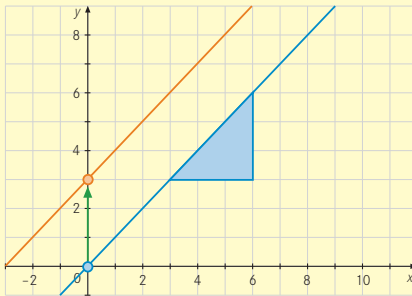
$$y = 2x$$

Hier ändert sich die **Steigung** der Geraden.



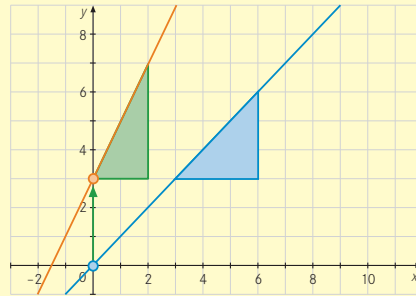
$$y = x + 3$$

Hier ändert sich der **Schnittpunkt mit der y-Achse**.



$$y = 2x + 3$$

Hier ändern sich **Steigung und Achsenschnittpunkt**.



**Info:** Ähnliches gilt für die Normalparabel  $y = x^2$ . Das sollst du im Folgenden untersuchen.

- 1 Zeichne den Graphen der Funktion  $y = x^2 + 3$  für  $-3 \leq x \leq 3$ . Lege eine Tabelle an.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^2$		4					
$x^2 + 3$		7					

# 1 Quadratische Funktionen

2 Zeichne den Graphen der Funktion  $y = (x - 3)^2$  für  $-1 < x < 6$ .

$x$	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x - 3$	-4	-3						
$(x - 3)^2$	16	9						

3 Zeichne ebenso die Graphen der Funktionen

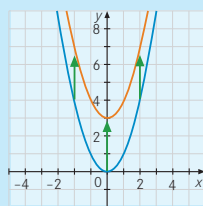
a)  $y = x^2 - 4$  für  $-3 \leq x \leq 3$  und

b)  $y = (x + 2)^2$  für  $-5 \leq x \leq 2$ .

Um zu beschreiben, wie sich die Lage der Normalparabel  $y = x^2$  verändert, wenn du den Term veränderst, sind hier die vier Graphen aus den letzten Aufgaben in ein gemeinsames Übersichtsbild gezeichnet.

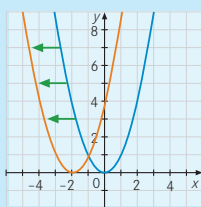
## DAS MUSST DU WISSEN

## Verschiebungen der Normalparabel



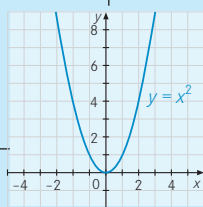
$$y = x^2 + 3$$

Verschiebung um 3 Einheiten nach „oben“

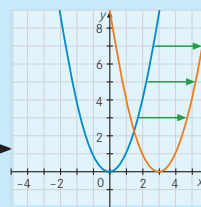


$$y = (x + 2)^2$$

Verschiebung um 2 Einheiten nach „links“

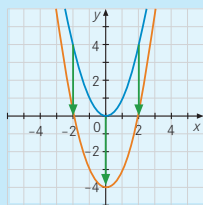


Verschiebung um 3 Einheiten nach „rechts“



$$y = (x - 3)^2$$

Verschiebung um 4 Einheiten nach „unten“



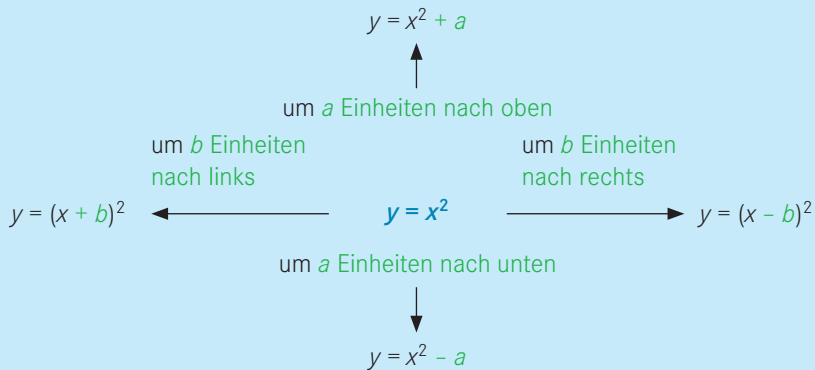
$$y = x^2 - 4$$

## 1.3 Verschiebungen der Normalparabel

Diese Veränderungen am Term bewirken also beim Graphen der Funktion **Verschiebungen**. Du kannst diese Beobachtungen verallgemeinern. Die folgende Übersicht zeigt dir, wie sich die Lage der Normalparabel verändert, wenn der Term durch die positiven reellen Zahlen  $a$  und  $b$  verändert wird.

### DAS MUSST DU WISSEN

### Verschiebungsregeln

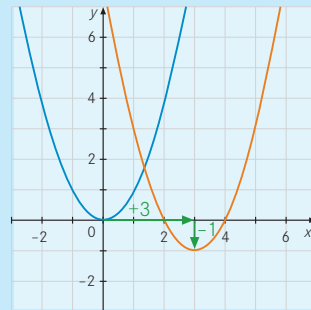


### Verkettung von Verschiebungen

### DAS MUSST DU WISSEN

Du kannst auch **zwei** Verschiebungen miteinander verbinden oder miteinander „verketteten“.

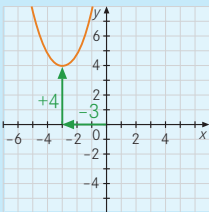
**Beispiel:** Wenn du die Normalparabel zuerst um **3 Einheiten nach rechts** und diese verschobene Parabel danach um **1 Einheit nach unten** verschiebst, lautet die Gleichung der neuen Parabel:  
 $y = (x - 3)^2 - 1$ .



# 1 Quadratische Funktionen

## DAS MUSST DU WISSEN

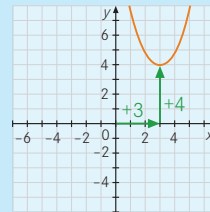
## Verkettungen von Verschiebungen



$$y = (x + 3)^2 + 4$$

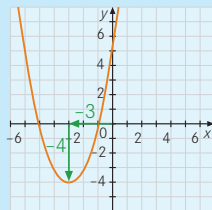
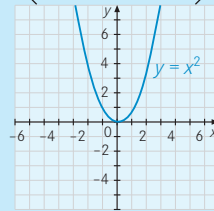
Verschiebung um  
3 Einheiten nach links

Verschiebung um  
4 Einheiten nach oben



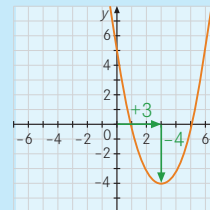
$$y = (x - 3)^2 + 4$$

Verschiebung um  
3 Einheiten nach rechts



$$y = (x + 3)^2 - 4$$

Verschiebung um  
4 Einheiten nach unten



$$y = (x - 3)^2 - 4$$

Umgekehrt kannst du aus der Gleichung einer Parabel in dieser Form auch leicht die Verschiebungen ablesen, wenn sie aus der Normalparabel hervorgegangen ist.

**Beispiel:**

$$y = (x + 2)^2 + 5$$

Verschiebung ... um 2 Einheiten nach links ... um 5 Einheiten nach oben.

## TIPPS UND INFOS

## Funktionsterm umformen

Manchmal musst du – mithilfe der binomischen Formeln – den Funktionsterm zuerst etwas umformen, bevor du ablesen kannst, welche Verschiebungen auf die Normalparabel angewendet werden.

**Beispiel:**  $y = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow y = (x + 3)^2$

Hier liegt eine Verschiebung der Normalparabel um 3 Einheiten nach links vor.

## 1.3 Verschiebungen der Normalparabel

### 4 Verschiebungen der Normalparabel

Schreibe auf, durch welche Abbildungen der Graph aus der Normalparabel entsteht.

**Beispiel:**  $y = (x + 1)^2$ : Verschiebung um 1 Einheit nach links

a)  $y = x^2 - 3$

b)  $y = (x - 3)^2$

c)  $y = (x + 6)^2 - 4$

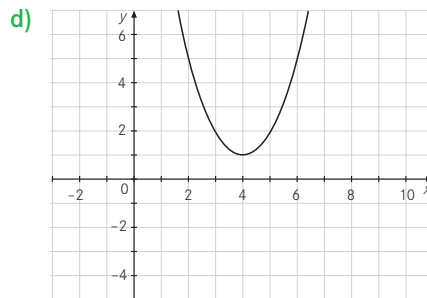
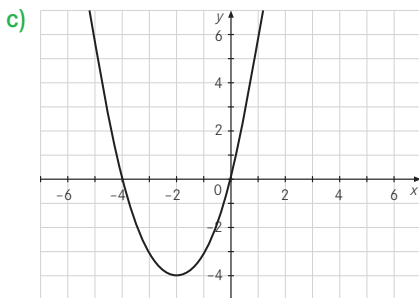
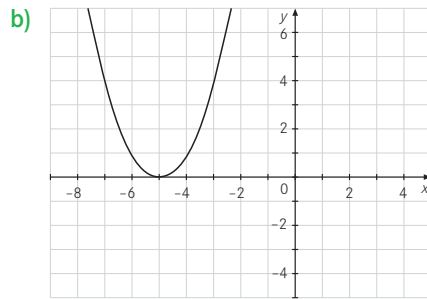
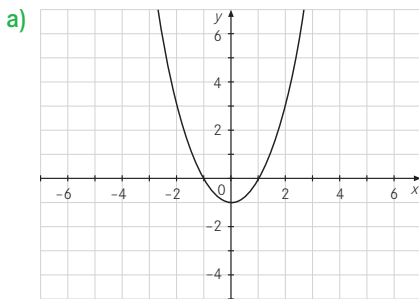
d)  $y = x^2 + 6x + 9$

e)  $y = x^2 - 2x + 1$

f)  $y = x^2 + 3x + 1,75$

### 5 Funktionsgleichungen bestimmen

Schreibe die Gleichungen der abgebildeten Funktionen auf. Lies dazu ab, um wie viele Einheiten sie jeweils in  $x$ - und in  $y$ -Richtung verschoben worden sind.



### 6 Zeichne mithilfe einer Parabelschablone die Graphen der Funktionen.

a)  $y = x^2 - 5$

b)  $y = x^2 + 1$

c)  $y = (x - 6)^2$

d)  $y = (x + 2)^2$

e)  $y = (x - 2)^2 + 4$

f)  $y = (x + 3)^2 - 5$

### 7 Terme umformen und Graphen zeichnen

Forme die Gleichung zuerst mithilfe der 1. bzw. 2. binomischen Formel um und zeichne dann mithilfe der Parabelschablone den Graphen.

a)  $y = x^2 - 4x + 4$

b)  $y = x^2 + 6x + 9$

c)  $y = x^2 - 5x + 6,25$

## „Scheitelpunkt“ der Normalparabel

### BEISPIEL

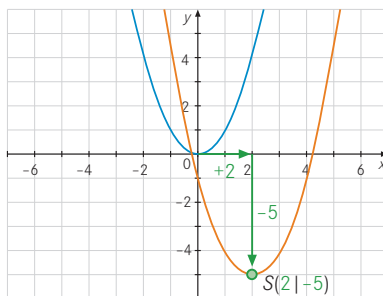
Am einfachsten kannst du die Verschiebung einer Parabel an ihrem **Scheitelpunkt** ablesen: Der Scheitelpunkt ist bei der Normalparabel der tiefste Punkt der Kurve.

Durch Verschiebung um **2 nach rechts** und um **5 nach unten** wandert der Scheitelpunkt von  $(0|0)$  zum Punkt  $(2|-5)$ . Die Funktion  $y = (x - 2)^2 - 5$  hat also den Scheitelpunkt  $S(2|-5)$ .

Du kannst die Gleichung  $y = (x - 2)^2 - 5$  auch ohne Klammern schreiben:

$$y = (x - 2)^2 - 5 = x^2 - 4x + 4 - 5 = x^2 - 4x - 1.$$

Die erste Form der Gleichung hat allerdings den Vorteil, dass du daraus direkt den Scheitelpunkt ablesen kannst. Diese Form heißt deshalb auch die **Scheitelpunktform** der Parabelgleichung.



### DAS MUSST DU WISSEN

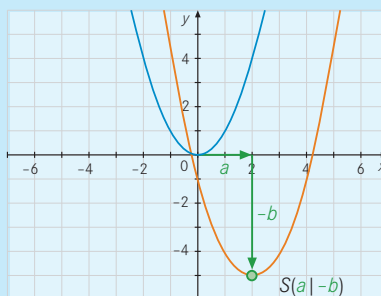
### Scheitelpunkt der Normalparabel

Wenn eine Parabel durch Verschiebung der Normalparabel um  $a$  Einheiten in  $x$ -Richtung und um  $-b$  Einheiten in  $y$ -Richtung entsteht, hat sie den Scheitelpunkt

$$S(a|-b).$$

Die Gleichung der Parabel in der Scheitelpunktform lautet

$$y = (x - a)^2 + (-b) = (x - a)^2 - b.$$



### 8 Parabelgleichung aufstellen

Eine Parabel entsteht durch Verschiebungen aus der Normalparabel und hat den Scheitelpunkt  $(4|-2)$ . Zeichne die Parabel und gib ihre Gleichung an.

### Scheitelpunktform und binomische Formeln

#### BEISPIEL

Bestimme die Scheitelpunkte der folgenden quadratischen Funktionen.

1.  $y = x^2 - 2x + 1$     2.  $y = x^2 - 6x + 9$     3.  $y = x^2 - 2x$     4.  $y = x^2 + 6x + 7$

Um den Scheitelpunkt ablesen zu können, musst du die Gleichungen auf die „Scheitelpunktform“ bringen. Dazu kannst du in den ersten beiden Beispielen sofort die passenden binomischen Formeln benutzen:


**Beispiel 1.:**  $y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = (x - 1)^2 + 0$       Scheitelpunkt: S(1|0)

**Beispiel 2.:**  $y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = (x - 3)^2 + 0$       Scheitelpunkt: S(3|0)


Bei den Beispielen 3. und 4. „passen“ die Zahlen offenbar nicht: Du kannst die Summe nicht ohne Weiteres mithilfe einer binomischen Formel in einen Potenzterm verwandeln.

Hier wendest du deshalb den folgenden Trick an: Durch gleichzeitiges Addieren und Subtrahieren derselben Zahl gelingt es, einen Term zu erzeugen, auf den du eine binomische Formel anwenden kannst:

**Beispiel 3.:**  $y = x^2 - 2x$   
 $= (x^2 - 2x + 1) - 1$   
 $= (x - 1)^2 - 1$   
 $= (x - (+1))^2 + (-1)$

  
 Scheitelpunkt: S(+1|-1)

**Beispiel 4.:**  $y = x^2 + 6x + 7$   
 $= (x^2 + 6x + 7 + 2) - 2$   
 $= (x^2 + 6x + 9) - 2$   
 $= (x + 3)^2 - 2$   
 $= (x - (-3))^2 + (-2)$

  
 Scheitelpunkt: S(-3|-2)

#### 9 Bestimme die Scheitelpunkte der folgenden quadratischen Funktionen:

a)  $y = x^2 + 8x + 16$     b)  $y = x^2 - 10x + 25$     c)  $y = x^2 + 8x + 15$     d)  $y = x^2 - 10x + 12$

#### „Ein Fachgespräch“

**Julia:** „Ich hab was Komisches festgestellt. Ist doch wirklich merkwürdig: Bei  $y = x^2 + 2$  wird die Normalparabel **nach oben zu positiven y-Werten** verschoben; bei  $y = (x + 2)^2$  wird **nach links zu negativen x-Werten** verschoben.“

**Christopher:** „Was lernen wir daraus? Man muss ganz schön aufpassen, ob eine Klammer dasteht oder nicht.“

#### 10 Parabeln zeichnen

Zeichne die Graphen der quadratischen Funktionen jeweils zusammen in ein Diagramm.

a)  $y = x^2 + 4$  und  $y = (x + 4)^2$

b)  $y = (x - 3)^2$  und  $y = x^2 - 3$



## 1.4 Streckungen, Stauchungen, Spiegelungen der Normalparabel

### Einzelne Streckungen, Stauchungen und Spiegelungen

Schau dir zunächst die folgenden Beispiele an.

**Beispiele:** Zeichne die Graphen der Funktionen im Bereich  $-3 \leq x \leq +3$ .

a)  $y = 2x^2$

b)  $y = 0,25x^2$

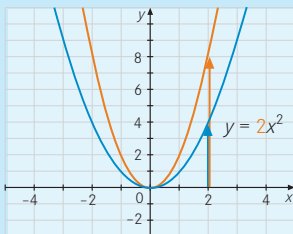
c)  $y = -x^2$

Die Lösungen dieser Aufgabe sind hier in einer Übersicht dargestellt. Du sollst daran erkennen, wie sich der Graph der Normalparabel verändert, wenn du die **Faktoren 2; 0,25** und **-1** in die Gleichung der Funktion einfügst.

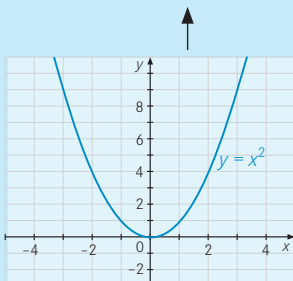
#### DAS MUSST DU WISSEN

#### Streckung, Stauchung, Spiegelung

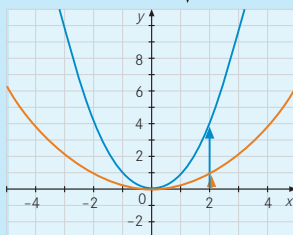
Durch den **Faktor 2** wird der Abstand aller Punkte der Normalparabel von der  $x$ -Achse verdoppelt, also mit 2 multipliziert. Insgesamt wird die Parabel **gestreckt**.



Streckung um den Faktor 2 in  $y$ -Richtung

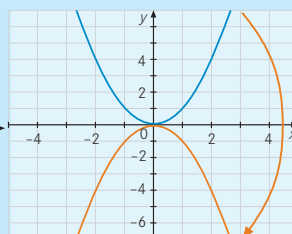


Stauchung um den Faktor 0,25 in  $y$ -Richtung



Spiegelung an der  $x$ -Achse

$$y = -x^2$$



Durch den Faktor **(-1)** werden alle Punkte an der  $x$ -Achse **gespiegelt**.

$$y = 0,25x^2 = \frac{1}{4}x^2$$

Durch den **Faktor 0,25** verkleinert sich der Abstand aller Punkte von der  $x$ -Achse auf ein Viertel. Insgesamt wird die Parabel **gestaucht**.

## 1.4 Streckungen, Stauchungen, Spiegelungen der Normalparabel

### Verkettung von Streckung, Stauchung und Spiegelung

#### DAS MUSST DU WISSEN

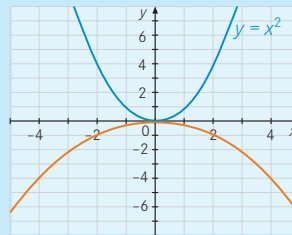
Wie du *Verschiebungen* miteinander verketteten kannst, so kannst du auch eine *Streckung* (oder *Stauchung*) und eine *Spiegelung nacheinander* ausführen, also miteinander verketteten.

#### Beispiel:

Wenn du eine **Stauchung** um den Faktor 0,25 mit einer **Spiegelung** an der  $x$ -Achse verkettest, hat die neue Funktion dann die Gleichung

$$y = (-1) \cdot (0,25) \cdot x^2 \text{ bzw.}$$

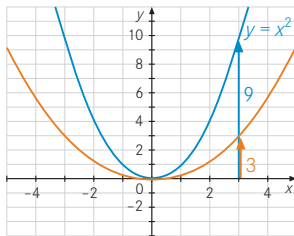
$$y = -0,25x^2.$$



#### BEISPIEL

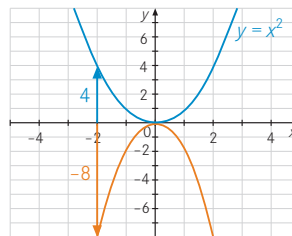
Bestimme jeweils die Gleichung der orangefarbenen Parabel.

Damit du den Streck- oder Stauchfaktor berechnen kannst, wählst du dir am besten eine Stelle aus, an der möglichst die zugehörigen Punkte beider Parabeln auf Gitterpunkten des Koordinatensystems liegen und damit leicht abzulesen sind.



**Stauchung** um den Faktor  $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ,

$$\text{also: } y = \frac{1}{3}x^2$$



**Streckung** um den Faktor  $\frac{8}{4} = 2$  und

**Spiegelung**, also:  $y = -2x^2$

#### 1 Untersuchung von Graphen

Gib an, ob die Graphen der folgenden Funktionen nach oben oder nach unten geöffnet sind. Gib außerdem an, durch welche Abbildung(en) der Graph jeweils aus der Normalparabel entsteht.

a)  $y = 2,5x^2$

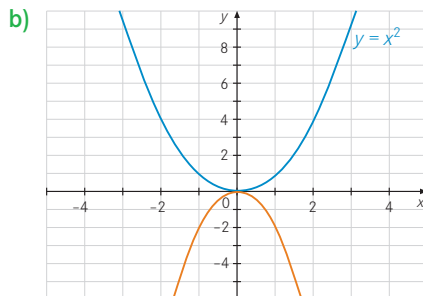
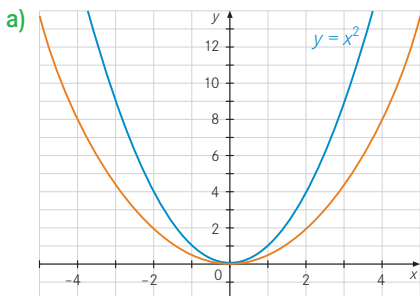
b)  $y = 0,8x^2$

c)  $y = -1,5x^2$

d)  $y = -0,9x^2$

# 1 Quadratische Funktionen

2 Bestimme jeweils die Gleichung der orangefarbenen Parabel.



3 Skizziere jeweils den Graphen der Funktion.

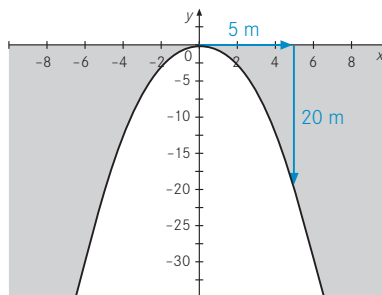
a)  $y = 3x^2$

b)  $y = \frac{1}{3}x^2$

c)  $y = -\frac{1}{3}x^2$

4 Der Brückenbogen

Im Scheitelpunkt des parabelförmigen Brückenbogens liegt der Ursprung des Koordinatensystems. Beschreibe den Verlauf des Brückenbogens mit einer quadratischen Gleichung.



Du hast bereits gelernt, wie sich die Funktionsgleichung verändert, wenn du bei der Normalparabel Verschiebungen in  $x$ - und in  $y$ -Richtung miteinander verbindest.

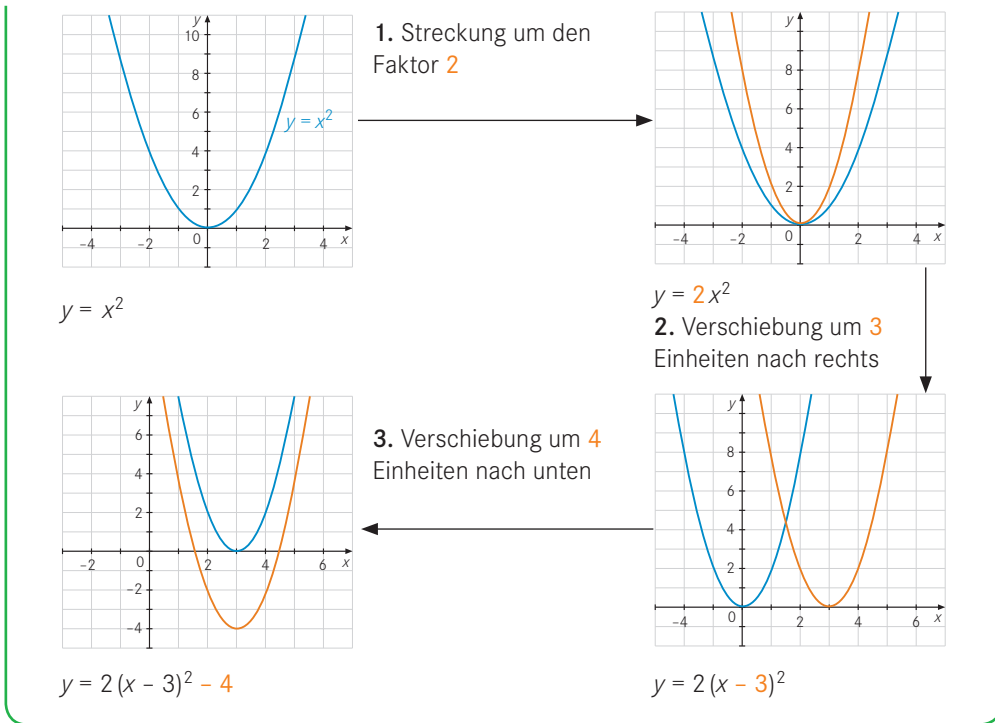
Jetzt betrachten wir ein Beispiel, bei dem Verschiebungen mit einer Streckung bzw. Stauchung verkettet werden.

## BEISPIEL Verkettungen

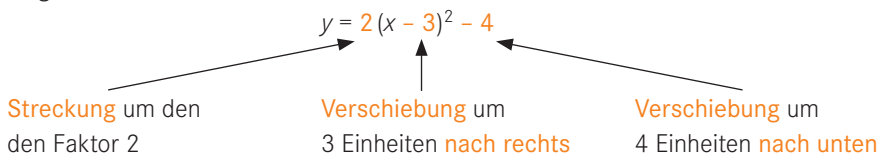
Im folgenden Beispiel werden die einzelnen Abbildungen, die miteinander verkettet werden sollen, schrittweise nacheinander ausgeführt:

1. Streckung um den Faktor 2
2. Verschiebung um 3 Einheiten nach rechts
3. Verschiebung um 4 Einheiten nach unten

# 1.4 Streckungen, Stauchungen, Spiegelungen der Normalparabel



An diesem Beispiel siehst du, wie du die Veränderungen im Graphen und in der Funktionsgleichung einander zuordnen kannst:



### DAS MUSST DU WISSEN

### Scheitelpunkt der Parabel

Du kannst aus dieser Funktionsgleichung auch sofort den Scheitelpunkt der Parabel ablesen:

$$y = 2(x - 3)^2 + (-4)$$

S(3 | -4)

Damit kannst du jetzt zu jeder Parabel, die durch die Abbildungen Streckung, Stauchung, Spiegelung und Verschiebung aus der Normalparabel hervorgegangen ist, die Funktionsgleichung finden (siehe Beispiel S. 20).

# 1 Quadratische Funktionen

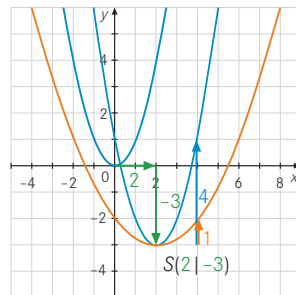
## BEISPIEL

Die gesuchte Funktion hat ihren Scheitelpunkt bei  $S(2|-3)$ . Die verschobene Normalparabel ist als Hilfe hier noch eingezeichnet.

Die gesuchte Parabel ist gestaucht. Um den Stauchfaktor zu ermitteln, wählst du außer dem Scheitelpunkt einen zweiten geeigneten Gitterpunkt aus.

Gehst du bei der verschobenen Normalparabel vom Scheitelpunkt aus 2 Einheiten nach rechts, so liegt der zugehörige Punkt  $4 = 2^2$  Einheiten darüber. Bei der gesuchten Parabel liegt der zugehörige Punkt aber nur 1 Einheit darüber. Der Stauchfaktor ist also  $\frac{1}{4}$ .

Somit hat die Parabel die Gleichung  $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + (-3)$ .



$\uparrow$                      $\uparrow$                      $\uparrow$   
 Stauchfaktor    Scheitelpunktkoordinaten

Du kannst den Term auf der rechten Seite auch noch auflösen, d. h. in eine Summe verwandeln, und erhältst:

$$y = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) - 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 - 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2.$$

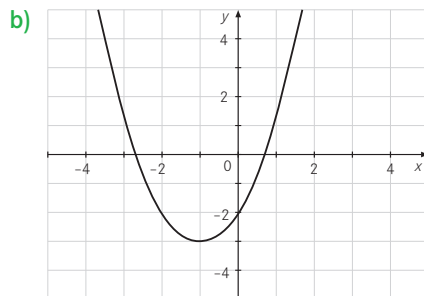
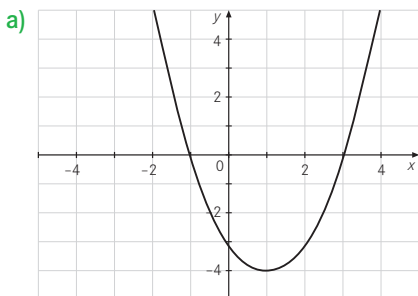
## DAS MUSST DU WISSEN

## Normalform der Parabelgleichung

Diese letzte Form der Parabelgleichung heißt Normalform. Die allgemeine Darstellung der Normalform lautet:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ wobei } a \neq 0; b, c \in \mathbb{R}.$$

## 5 Bestimme die Gleichungen der Parabeln in Scheitelpunktform und Normalform.



### 1.5 Verschiedene Aufgaben zu quadratischen Funktionen

#### Von der Normalform zur Scheitelpunktform

Manchmal ist eine Parabelgleichung in der **Normalform** angegeben. Um einen raschen Überblick über die Lage der Parabel zu bekommen, kannst du sie in die **Scheitelpunktform** verwandeln.

**Beispiel:**

Normalform:  $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$

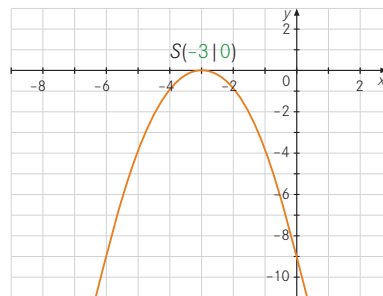
Scheitelpunktform:  $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3$

Der Weg von der Normalform zur Scheitelpunktform ist allerdings etwas mühsamer als umgekehrt. Du siehst hier an den folgenden zwei Beispielen, wie du diese Umwandlung durchführen kannst.

#### BEISPIEL Binomische Formeln anwenden

$$\begin{aligned}
 y &= -x^2 - 6x - 9 & | \cdot (-1) & \text{Vorläufiges Beseitigen des Faktors } (-1) \text{ vor } x^2 \\
 -y &= x^2 + 6x + 9 & & \text{Anwenden der 1. binomischen Formel} \\
 -y &= (x + 3)^2 & | \cdot (-1) & \text{Auflösen nach } y \\
 y &= (-1) \cdot (x + 3)^2 \\
 y &= (-1) \cdot (x - (-3))^2 + 0 & & \text{Scheitelpunktform}
 \end{aligned}$$

Die Parabel mit der Gleichung  $y = -x^2 - 6x - 9$  hat also den Scheitelpunkt  $S(-3 | 0)$ . Außerdem ist der Graph gegenüber der Normalparabel an der  $x$ -Achse **gespiegelt**, also **nach unten geöffnet**.



#### BEISPIEL Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5 & | \cdot (2) & \text{Vorläufiges Beseitigen des Faktors } \frac{1}{2} \text{ vor } x^2 \\
 2y &= x^2 + 6x - 10 & | + 10 & \text{Vorläufiges Beseitigen des Summanden ohne } x \\
 2y + 10 &= x^2 + 6x & | + 9 & \text{Ergänzung zu einem „binomischen Term“} \\
 2y + 10 + 9 &= x^2 + 6x + 9 & & \text{Anwenden der 1. oder 2. binomischen Formel} \\
 2y + 19 &= (x + 3)^2 & | - 19 & \text{Auflösen nach } y \\
 2y &= (x + 3)^2 - 19 & | \cdot \frac{1}{2} \\
 y &= \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 9,5
 \end{aligned}$$

**Tip:** Die quadratische Ergänzung zu einem „binomischen Term“ findest du, indem du „den halben Faktor von  $x$ “ quadrierst, also hier  $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ .

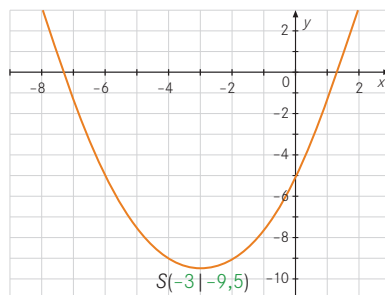
# 1 Quadratische Funktionen

$$y = \frac{1}{2}(x - (-3))^2 + (-9,5) \text{ Scheitelpunktform}$$

Die Parabel mit der Gleichung  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$  hat also den Scheitelpunkt  $S(-3 | -9,5)$ .

Außerdem ist der Graph **nach oben geöffnet** und gegenüber der Normalparabel um den

Faktor  $\frac{1}{2}$  gestaucht.



## 1 Bestimme die Scheitelpunktform.

a)  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3,5$

b)  $y = 2x^2 - 8x + 16$

c)  $y = -3x^2 + 6x - 1$

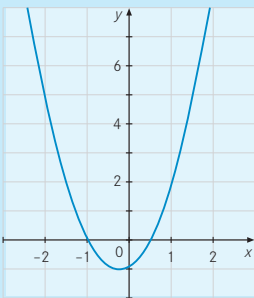
### DAS MUSST DU WISSEN

### Oben oder unten offen?

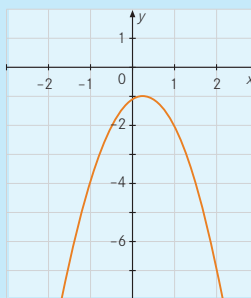
Wenn der **Faktor vor  $x^2$**  in der Normalform **positiv** ist, dann ist die Parabel **nach oben geöffnet**. Ist der Faktor **negativ**, ist sie **nach unten geöffnet**.

**Beispiele:**

$$y = +2x^2 + x - 1$$

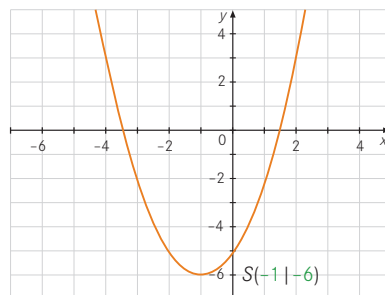


$$y = -2x^2 + x - 1$$



## Punktprobe

Rechts ist der Graph der Funktion  $y = x^2 + 2x - 5$  im Bereich  $-5 < x < 4$  dargestellt. Aus dem Bild kannst du z. B. ablesen, dass der Punkt  $A(2 | 3)$  auf der Parabel liegt. Wie kannst du feststellen, ob die Punkte  $B(6 | 43)$  und  $C(-7 | 31)$  auf der Parabel liegen? Aus dem Bild kannst du das offenbar nicht erkennen, weil die Punkte  $B$  und  $C$  außerhalb des gezeichneten Bereiches liegen. Wie entscheidet man diese Frage, ohne ein größeres Bild zu zeichnen?



## 1.5 Verschiedene Aufgaben zu quadratischen Funktionen

Den Punkt  $A(2|3)$  bekommst du, wenn du für die Funktion eine Wertetabelle anlegst:

$x$	...	1	2	3	4	...
$y$	...	-2	3	10	19	...

Die Frage lautet also: Gilt das auch entsprechend für die Punkte  $B$  und  $C$ ?

Das kannst du ausprobieren, indem du jeweils den  $x$ -Wert des Punktes in die Funktionsgleichung einsetzt und den zugehörigen  $y$ -Wert ausrechnest:

$B$ :  $6^2 + 2 \cdot 6 - 5 = 43$       43 ist der  $y$ -Wert von  $B$ ; somit liegt  $B(6|43)$  auf der Parabel.

$C$ :  $(-7)^2 + 2 \cdot (-7) - 5 = 30 \neq 31$       Der  $y$ -Wert zu  $x = -7$  ist 30 und nicht 31;  
also liegt der Punkt  $C(-7|31)$  *nicht* auf der Parabel.

### DAS MUSST DU WISSEN

### Punktprobe

Wir nennen diesen Test, bei dem man die Koordinatenwerte nachrechnet, „Punktprobe“.

### 2 Überprüfe, ob die jeweils angegebenen Punkte auf der Parabel liegen.

a)  $A(1|-6)$  und  $B(-2|6)$        $y = x^2 - 3x - 4$

b)  $P(2|8)$  und  $Q(-1|-2)$        $y = 3x^2 - x - 2$

### 3 Wie muss man die Zahl $a$ wählen, sodass ...

a) ... der Punkt  $P(1|5)$  auf der Parabel mit der Gleichung  $y = x^2 - 3x + a$  liegt?

b) ... der Punkt  $Q(-2|4)$  auf der Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2 - 2x + 1$  liegt?

## Anwendungen in Sachproblemen: „Extremwertaufgaben“

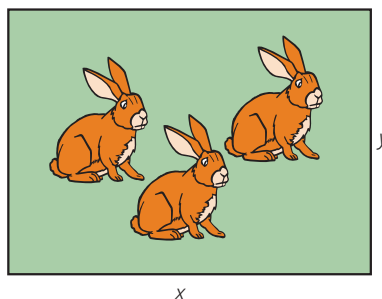
### BEISPIEL

Mit 20 m Maschendrahtzaun soll ein Gehege gebaut werden. Dabei soll die eingezäunte Fläche möglichst groß sein.

Wie lang sind die Seiten zu wählen?

Lösung:

Die Seiten des Rechtecks sollen  $x$  und  $y$  heißen. Es gilt dann die Bedingung  $2x + 2y = 20$  oder  $x + y = 10$ , da die Gesamtlänge des Zauns 20 m beträgt.





# 1 Quadratische Funktionen

Zunächst kannst du systematisch Werte ausprobieren. Für den Flächeninhalt  $A$  gilt:  
 $A = x \cdot y$ .

Seitenlänge $x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Seitenlänge $y$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Flächeninhalt $A$	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

Offensichtlich wird der Flächeninhalt  $A$  besonders groß, wenn die Seitenlänge  $x$  genau 5 m beträgt. Damit wäre die Aufgabe durch Probieren eigentlich schon gelöst.

Weil du mit Probieren aber nicht immer zum Ziel kommst, lernst du hier noch einen zweiten Weg zur Lösung kennen.

Da in der Tabelle die Werte für  $A$  aus den Werten für  $x$  und  $y$  entstehen, und da die Werte für  $y$  aber wiederum von  $x$  abhängen, schreibst du nur die Werte für  $x$  und  $A$  in eine separate zweite Tabelle. Die Werte für  $y$  lässt du dabei weg. Die Wertepaare in dieser Tabelle stellst du dann im Koordinatensystem dar.

Seitenlänge $x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Flächeninhalt $A$	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

Stelle die Werte aus der Tabelle im Koordinatensystem dar.

## DAS MUSST DU WISSEN

### Extremwert bestimmen

Wenn du die Wertepaare aus obiger Tabelle ins Koordinatensystem einträgst, erkennst du, dass die Punkte auf einer Parabel liegen.

Was hat die Parabel nun mit dem Gehege für die Kaninchen zu tun?

Der Scheitelpunkt dieser Parabel liefert dir die Antwort auf die anfangs gestellte Frage, denn am **Scheitelpunkt** der Parabel ist der Wert des **Flächeninhalts maximal**.

Die Aufgabenstellung lautet also nun:

1. Finde die Gleichung der Parabel.
2. Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel.

## 1.5 Verschiedene Aufgaben zu quadratischen Funktionen

Es gelten folgende Gleichungen:

- (I)  $A = x \cdot y$  Diese Gleichung heißt **Hauptbedingung**, da sie den Flächeninhalt enthält, der maximal werden soll.
- (II)  $x + y = 10$  Diese Gleichung heißt **Nebenbedingung**.

Du kannst nun die Nebenbedingung nach  $y$  auflösen und den Term für  $y$  in die Hauptbedingung einsetzen:

- (II)  $y = 10 - x \Rightarrow A = x(10 - x) \Rightarrow$
- (III)  $A = -x^2 + 10x$  Diese Gleichung heißt **Zielfunktion**.

Die **Zielfunktion** (III) musst du nun auf Scheitelpunktform bringen, um den Scheitelpunkt ablesen zu können:

$$\begin{aligned} A &= -x^2 + 10x && | \cdot (-1) \\ -A &= x^2 - 10x && | + 25 \\ -A + 25 &= x^2 - 10x + 25 && | \text{ 2. binomische Formel} \\ -A + 25 &= (x - 5)^2 && | - 25 \\ -A &= (x - 5)^2 - 25 && | \cdot (-1) \\ A &= -(x - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

Die Parabel hat den Scheitelpunkt  $S(5 | 25)$ .

Das bedeutet: Wenn die Seitenlänge  $x$  5 m beträgt, wird der Flächeninhalt maximal mit  $A_{\max} = 25 \text{ m}^2$ . Die Seitenlänge  $y$  beträgt dann  $y = 10 \text{ m} - 5 \text{ m} = 5 \text{ m}$ .

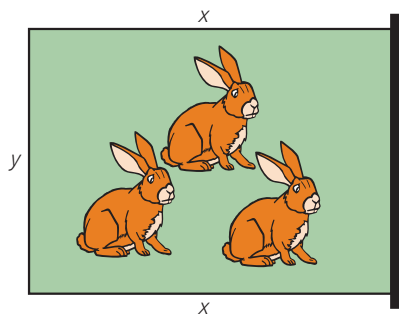
### BEISPIEL

Wie ändert sich die Lösung, wenn das Gehege an einer Seite an eine Wand angebaut wird? (Diese Aufgabe kannst du jetzt ohne Probieren lösen.)

- (I) Hauptbedingung:  $A = x \cdot y$
- (II) Nebenbedingung:  $2x + y = 20$
- (III) Zielfunktion:  $A = x(20 - 2x)$   
 $A = -2x^2 + 20x$

**Tipp:** Du solltest zur Übung nachrechnen, dass diese Funktion die folgende Scheitelpunktform hat:  $A = -2(x - 5)^2 + 50$ .

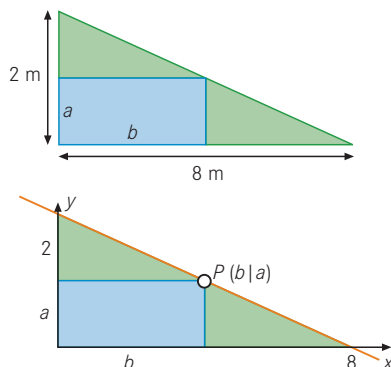
Der Scheitelpunkt dieser Funktion liegt dann bei  $S(5 | 50)$ . Das bedeutet, dass der Flächeninhalt des Geheges maximal  $A = 50 \text{ m}^2$  beträgt, wenn für die Seitenlänge  $x = 5 \text{ m}$  gilt. Die andere Seite hat dann die Länge  $y = 20 \text{ m} - 2 \cdot 5 \text{ m} = 10 \text{ m}$ .



## BEISPIEL

Aus einer dreieckigen Glasscheibe soll eine rechteckige Glasscheibe mit möglichst großem Flächeninhalt herausgeschnitten werden. Wie muss man die Seiten  $a$  und  $b$  wählen?

**Tip:** Du kannst die Aufgabe anders formulieren. Die dreieckige Scheibe legst du dazu in ein Koordinatensystem.



Durch die schräge Kante ist eine Gerade mit der Steigung  $m = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$  und dem Ordinaten Schnittpunkt 2 festgelegt. Die Gerade hat also die Gleichung  $y = -\frac{1}{4}x + 2$ . Auf der Geraden liegt der Eckpunkt  $P(b|a)$  der gesuchten rechteckigen Glasscheibe.

Die Aufgabe heißt nun: Wo muss der Punkt  $P(b|a)$  auf der Geraden  $y = -\frac{1}{4}x + 2$  liegen, damit das Rechteck unterhalb der Geraden den größtmöglichen Flächeninhalt hat?

(I) **Hauptbedingung:**  $A = a \cdot b$ , da der Flächeninhalt des Rechtecks maximal werden soll.

(II) **Nebenbedingung:**  $a = -\frac{1}{4}b + 2$ , da der Punkt  $P$  auf der Geraden liegt, und die Werte  $a$  und  $b$  somit die Gleichung erfüllen.

(III) **Zielfunktion:**  $A = b \left(-\frac{1}{4}b + 2\right)$  bzw.  $A = -\frac{1}{4}b^2 + 2b$  durch Einsetzen von (II) in (I).

Rechne zur Übung nach, dass die Scheitelpunktform dieser Funktion die Gestalt hat:  
 $A = -\frac{1}{4}(b - 4)^2 + 4$ .

Man erhält den größtmöglichen Flächeninhalt, wenn die Seite  $b = 4$  m und die Seite  $a = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 4 + 2 = 1$  Meter lang ist.

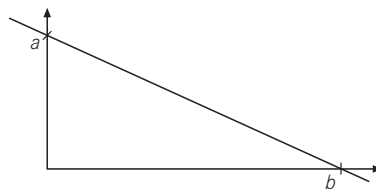
**4** Welches aller Rechtecke vom Umfang 30 cm hat den größten Flächeninhalt?

**5** Maximale Dreiecksfläche

Eine Gerade schneide die Koordinatenachsen an den Stellen  $a$  und  $b$ , wobei gelten soll:

$$a + 2b = 2 \quad (0 < a < 2; 0 < b < 1).$$

Wie sind  $a$  und  $b$  zu wählen, damit der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird, das die Gerade und die beiden Koordinatenachsen einschließen?



## Test

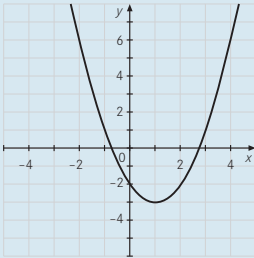
- 1 Gib an, durch welche Abbildungen der Graph der angegebenen Funktion aus der Normalparabel hervorgeht. | 4 |

a)  $y = (x - 2)^2 + 3$

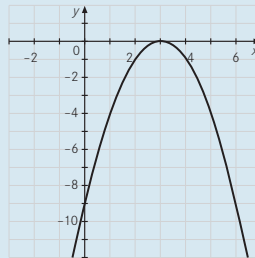
b)  $y = -(x + 1)^2 - 0,5$

- 2 Bestimme die Gleichungen der abgebildeten quadratischen Funktionen in der Scheitelpunktform. | 6 |

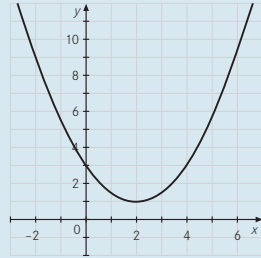
a)



b)



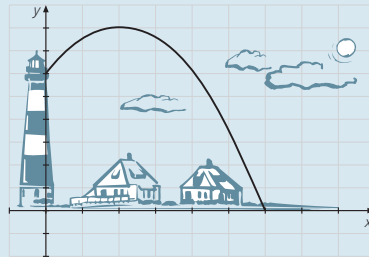
c)



- 3 Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel  $y = x^2 + 8x + 9$ . | 3 |

- 4 Der Wurf

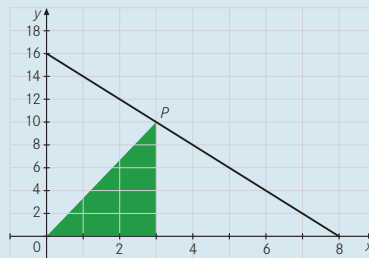
Von einem Turm wird ein Stein schräg abgeworfen. Seine Flugbahn wird durch die Gleichung  $y = -0,1x^2 + 2x + 30$  beschrieben ( $x$  und  $y$  in Metern). Bestimme aus der Gleichung die Abwurfhöhe und die Koordinaten des Gipfelpunktes.



- 5 Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt der Parabel  $y = bx^2 + 2ax$ ? | 6 |

- 6 Maximales Dreieck

Durch den Punkt  $P(x|y)$  auf der Geraden  $g$  mit  $y = -2x + 16$  ist ein rechtwinkliges Dreieck festgelegt. Welche Koordinaten muss der Punkt  $P$  haben, damit der Flächeninhalt des Dreiecks möglichst groß wird? Gib diesen maximalen Flächeninhalt an.



| 32 |

Wie viele Punkte hast du? Erreichst du mehr als 25 Punkte, beherrschst du den Inhalt des Kapitels wirklich gut. Erreichst du weniger als 13 Punkte, dann solltest du dieses Kapitel wiederholen.