DUDEN

Mathematik

POCKET TEACHER

ABI

Duden

POCKET TEACHER ABI

Mathematik

7., aktualisierte Auflage

Fritz Kammermeyer
Roland Zerpies

Dudenverlag
Berlin

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

 D C B A

Bibliographisches Institut GmbH,
Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Redaktionelle Leitung: David Harvie
Redaktion: Dr. Angelika Fallert-Müller, Michael Venhoff
Herstellung: Ditte Hoffmann
Umschlaggestaltung: 2issue, München
Layout / technische Umsetzung: LemmeDESIGN, Berlin
Sachzeichnungen: Lennart Fischer, Berlin
Druck und Bindung: AZ Druck und Datentechnik GmbH
Heisinger Straße 16, 87437 Kempten

Printed in Germany

ISBN 978-3-411-77122-6

Inhalt

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

auf der Zielgeraden zum Abitur in Mathematik soll Ihnen dieses Buch helfen, möglichst optimal vorbereitet und sicher in die anstehende Prüfung zu gehen.

Flankierend zu den persönlichen Aufzeichnungen bietet der Pocket Teacher Abi die perfekte Ergänzung zur effektiven Auffrischung und Festigung des Lernstoffs. Die komplexen Inhalte sind anhand von vielen Beispielen und Darstellungen anschaulich erklärt, klar gegliedert und auf das wirklich Wesentliche zusammengefasst.

Das umfangreiche Stichwortverzeichnis bietet außerdem die Möglichkeit, konkrete Fachbegriffe schnell zu finden und im Kontext zu verstehen.

Viel Erfolg bei den Prüfungen zum Abitur!
Ihr Dudenverlag

1 Funktionen

1.1 Quadratische Funktionen und Wurzelfunktionen

Die quadratischen Funktionen

Eine Funktion f: $x \mapsto ax^2 + bx + c$, mit a, b, $c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ heißt ***quadratische Funktion.***
Ihre maximale Definitionsmenge ist $D_f = \mathbb{R}$ mit der Wertemenge $W_f = [c - \frac{b^2}{4a}; \infty[$ für $a > 0$ bzw. $W_f =]-\infty; c - \frac{b^2}{4a}]$ für $a < 0$.

Nullstellen

Eine quadratische Funktion f hat entweder keine, eine oder zwei Nullstellen ($f(x_0) = 0$). Die Anzahl der Nullstellen hängt vom Wert der ***Diskriminante*** $D = b^2 - 4ac$ der zugehörigen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ ab.
Für $D < 0$ besitzt f keine Nullstelle.
Für $D = 0$ hat f genau eine Nullstelle: $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
Für $D > 0$ gibt es genau zwei Nullstellen:
$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Besitzt f Nullstellen, so lässt sich $f(x)$ ***in Faktoren zerlegen:***
$f(x) = a \cdot (x - x_0)^2$ bei einer (doppelten) Nullstelle x_0,
$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ bei zwei Nullstellen x_1 und x_2.

BEISPIELE

- $f(x) = x^2 + 2$; $D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -8 < 0 \Rightarrow f$ hat keine Nullstelle.
- $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$; $D = 16 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow f$ hat genau eine Nullstelle: $x_0 = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$.

Faktorzerlegung: $f(x) = 2 \cdot (x - 1)^2$.
- $f(x) = 3x^2 - 3$; $D = 0 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 36 > 0 \Rightarrow f$ hat genau zwei Nullstellen: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

Faktorzerlegung: $f(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$.

Graph

Der Graph ist eine Parabel mit $y = ax^2 + bx + c$. Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ nach unten geöffnet. Je kleiner $|a|$, desto flacher verläuft sie. Der höchste (für $a < 0$) bzw. tiefste (für $a > 0$) Punkt der Parabel heißt ***Scheitel*** $S(s|t)$.

Es gilt: $S\left(-\frac{b}{2a}\middle|c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

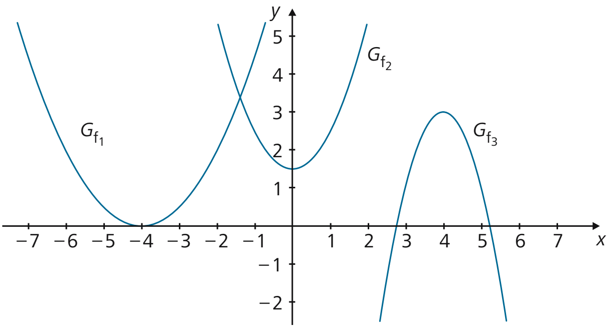
Der Graph ist symmetrisch zur Geraden $x = s$ durch den Scheitel. Liegt der Scheitel auf der x-Achse, d.h. $t = 0$, dann hat f genau eine doppelte Nullstelle.

Jede quadratische Funktion $f\colon x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ lässt sich auf die ***Scheitelform*** $f\colon x \mapsto a(x-s)^2 + t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ bringen.

Der Graph G_f zu $f\colon x \mapsto a(x-s)^2 + t$ entsteht aus der Normalparabel durch Form- und Lageveränderungen (▶ S. 12 f.).

BEISPIELE

- $f_1\colon x \mapsto 0{,}5x^2 + 4x + 8 = 0{,}5(x+4)^2$
  $S(-4|0)$; $W_f = [0; \infty[$; eine doppelte Nullstelle
- $f_2\colon x \mapsto x^2 + 1{,}5$
  $S(0|1{,}5)$; $W_f = [1{,}5; \infty[$; keine Nullstelle
- $f_3\colon x \mapsto -2x^2 + 16x - 29 = -2(x-4)^2 + 3$
  $S(4|3)$; $W_f =]-\infty, 3]$; zwei Nullstellen



Bestimmung der Koordinaten des Scheitels $S(s|t)$

1. Möglichkeit: Einsetzen der Koeffizienten a, b und c in die allgemeine Form der Scheitelkoordinaten.

BEISPIEL $y = -2x^2 + 16x - 29$ (3. Beispiel oben):

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2\cdot(-2)} = 4,\; t = c - \frac{b^2}{4a} = -29 - \frac{16^2}{4\cdot(-2)} = 3;$$

Scheitel $S(4|3)$.

2. Möglichkeit: Aus der ***Scheitelform*** $y = a \cdot (x - s)^2 + t$ sind die Scheitelkoordinaten $S(s|t)$ ablesbar. Die Scheitelform erhält man aus der Normalform durch ***quadratische Ergänzung.***

BEISPIEL

$y = -2x^2 + 16x - 29$	Ausklammern von -2
$= -2 \cdot (x^2 - 8x + 14{,}5)$	
$= -2 \cdot \left(x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 14{,}5\right)$	Quadratische Ergänzung
$= -2 \cdot [(x-4)^2 - 1{,}5]$	Zusammenfassen des Binoms
$= -2 \cdot (x-4)^2 + 3.$	Ausmultiplizieren
Somit: $S(4|3)$.	

3. Möglichkeit: Bestimmung der 1. Scheitelkoordinate s als Nullstelle der Ableitung f' von f (▶ S. 34). Für die 2. Scheitelkoordinate t gilt: $t = f(s)$.

BEISPIEL $y = x^2 + 1{,}5$; (2. Beispiel ▶ S. 9):
Für die Ableitung gilt: $y' = 2x$; $y' = 0 \Rightarrow s = 0$; $t = f(0) = 1{,}5$.
Scheitel $S(0|1{,}5)$.

Die Wurzelfunktionen

Quadratische Funktionen sind auf $\mathbb{R}$ nicht umkehrbar, da sie nicht eineindeutig sind. Durch Einschränkung der Definitionsmenge auf Bereiche mit strenger Monotonie können abschnittsweise Umkehrfunktionen bestimmt werden.

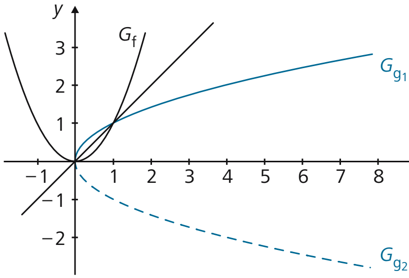
Umkehrung der Quadratfunktion

AUGEN AUF! Die Quadratfunktion $f: x \mapsto x^2$ ist für die Einschränkungen auf $D_1 = [0; \infty[$ bzw. $D_2 =]-\infty; 0]$ umkehrbar.

$\boldsymbol{f_1: x \mapsto x^2, D_1 = [0; \infty[}$**:**
Die Umkehrfunktion ist die ***Wurzelfunktion*** $g_1: x \mapsto \sqrt{x}$ mit $D = \mathbb{R}_0^+$ und $W = \mathbb{R}_0^+$.
Die Wurzelfunktion ist streng monoton zunehmend, ihr globales Minimum ist am Rand von D_1 bei $x = 0$.

$\boldsymbol{f_2: x \mapsto x^2, D_2 =]-\infty; 0]}$**:**
Die Umkehrfunktion ist hier die Funktion $g_2: x \mapsto -\sqrt{x}$ mit $D = \mathbb{R}_0^+$ und $W = \mathbb{R}_0^-$. Sie ist streng monoton abnehmend, ihr globales Maximum ist am Rand von D_2 bei $x = 0$. Ihr Graph entsteht aus dem Graphen der Wurzelfunktion durch Spiegelung an der x-Achse.

Die Graphen von
$f: x \mapsto x^2$,
$g_1: x \mapsto \sqrt{x}$,
$g_2: x \mapsto -\sqrt{x}$



Umkehrungen quadratischer Funktionen

AUGEN AUF! Die allgemeine quadratische Funktion $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ ist für die Einschränkungen auf die Bereiche $D_1 = \left[-\frac{b}{2a}; \infty\right[$ bzw. $D_2 = \left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ umkehrbar (die Bereiche jeweils „links bzw. rechts vom Scheitel“).
Die Vorschriften für die jeweilige Umkehrung erhält man aus der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ durch Auflösen nach x und anschließendem Variablentausch.

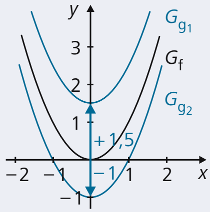
Thema:
Form- und Lageänderungen von Funktionsgraphen

1 Addition einer Konstanten zum Funktionsterm

$g(x) = f(x) + a,\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Der Graph G_g der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen G_f um $|a|$ in positive y-Richtung (also nach oben) für $a > 0$ und in negative y-Richtung (also nach unten) für $a < 0$.

BEISPIELE

- $f(x) = x^2$
- $g_1(x) = x^2 + 1{,}5$
- $g_2(x) = x^2 - 1$

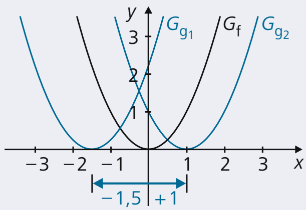


2 Addition einer Konstanten zum Argument der Funktion

$g(x) = f(x + b),\ b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Der Graph G_g der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen G_f um $|b|$ in negative x-Richtung (also nach links) für $b > 0$ und in positive x-Richtung (also nach rechts) für $b < 0$.

BEISPIELE

- $f(x) = x^2$
- $g_1(x) = (x + 1{,}5)^2$
- $g_2(x) = (x - 1)^2$



3 Multiplikation des Funktionsterms mit einer Konstanten

$g(x) = c \cdot f(x),\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Der Graph G_g der Funktion g entsteht durch eine Streckung oder Stauchung des Graphen G_f in y-Richtung. Dabei bleiben die Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen) erhalten.

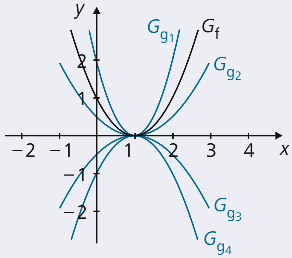
Fallunterscheidung:

$c > 1$:	Streckung parallel zur y-Achse; Streckfaktor c
$0 < c < 1$:	Stauchung parallel zur y-Achse; Streckfaktor c
$-1 < c < 0$:	Spiegelung an der x-Achse und anschließende Stauchung parallel zur y-Achse; Streckfaktor $\lvert c \rvert$
$c = -1$:	Spiegelung an der x-Achse: $g(x) = -1 \cdot f(x) = -f(x)$
$c < -1$:	Spiegelung an der x-Achse und anschließende Streckung parallel zur y-Achse; Streckfaktor $\lvert c \rvert$

1

BEISPIELE

- $f(x) = (x-1)^2$
- $g_1(x) = 2(x-1)^2$
- $g_2(x) = 0{,}5(x-1)^2$
- $g_3(x) = -0{,}5(x-1)^2$
- $g_4(x) = -(x-1)^2$



BEACHTE Die Graphen zu $y = c \cdot f(x)$ und $y = -c \cdot f(x)$ sind zueinander symmetrisch bezüglich der x-Achse.

4 Multiplikation des Arguments mit einer Konstanten

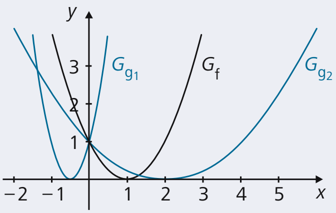
$g(x) = f(d \cdot x),\ d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Der Graph G_g der Funktion g entsteht durch eine Streckung oder Stauchung des Graphen G_f in x-Richtung. Dabei bleibt der Schnittpunkt mit der y-Achse erhalten. Fallunterscheidung:

$d > 1$:	Stauchung parallel zur x-Achse; Streckfaktor $\frac{1}{d}$
$d = 1$:	identische Abbildung
$0 < d < 1$:	Streckung parallel zur x-Achse; Streckfaktor $\frac{1}{d}$
$-1 < d < 0$:	Spiegelung an der y-Achse und anschließende Streckung parallel zur x-Achse; Streckfaktor $\left\lvert \frac{1}{d} \right\rvert$
$d = -1$:	Spiegelung an der y-Achse: $g(x) = f(-1 \cdot x) = f(-x)$
$d < -1$:	Spiegelung an der y-Achse und anschließende Stauchung parallel zur x-Achse; Streckfaktor $\left\lvert \frac{1}{d} \right\rvert$

BEISPIELE

- $f(x) = (x-1)^2$
- $g_1(x) = (-2x-1)^2$
- $g_2(x) = (0{,}5x-1)^2$

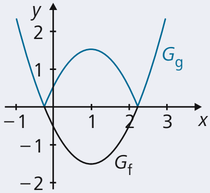


BEACHTE Die Graphen zu $y = f(d \cdot x)$ und $y = f(-d \cdot x)$ sind zueinander symmetrisch bezüglich der y-Achse.

5 Betrag und Funktionsterm

Betrag des Funktionsterms: $g(x) = |f(x)|$

Der Graph G_g der Funktion g entsteht durch eine Spiegelung der unter der x-Achse liegenden Teile von G_f an der x-Achse. Dabei bleiben die Schnittpunkte mit der x-Achse erhalten.

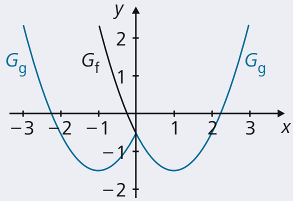


BEISPIEL $f(x) = x^2 - 2x - 0{,}5$;
$g(x) = |x^2 - 2x - 0{,}5|$

Betrag des Arguments: $g(x) = f(|x|)$

Den Argumenten x und $-x$ wird nun derselbe Funktionswert zugeordnet, der Graph G_g liegt symmetrisch zur y-Achse.

Entstehung des Graphen G_g aus dem Graphen G_f: Die links von der y-Achse liegenden Teile von G_f werden durch die Spiegelbilder (an der y-Achse) der rechts von der y-Achse liegenden Teile von G_f ersetzt. Der Schnittpunkt mit der y-Achse bleibt erhalten.



BEISPIEL

$f(x) = x^2 - 2x - 0{,}5$
$g(x) = |x|^2 - 2|x| - 0{,}5$

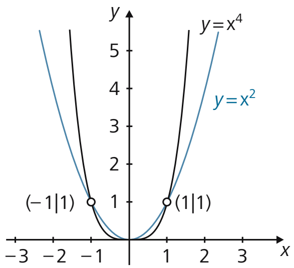
1.2 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

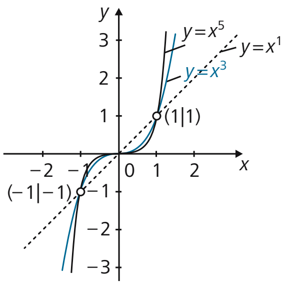
Eine Funktion $f\colon x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, heißt ***Potenzfunktion***. Ihr Graph heißt ***Parabel n-ter Ordnung.*** Die maximale Definitionsmenge ist $D_f = \mathbb{R}$.

BEISPIELE

◆ $f\colon x \mapsto x^2$, $f\colon x \mapsto x^4$



◆ $f\colon x \mapsto x^1$, $f\colon x \mapsto x^3$, $f\colon x \mapsto x^5$



Eigenschaften

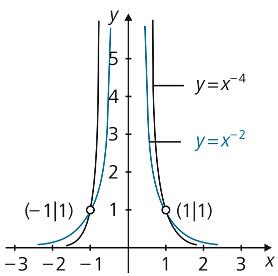
Für gerades *n*:	**Für ungerades *n*:**
Wertemenge $W_f = \mathbb{R}_0^+$	Wertemenge $W_f = \mathbb{R}$
$x = 0$ ist Nullstelle gerader Ordnung ohne Vorzeichenwechsel (▸ S. 22).	$x = 0$ ist Nullstelle ungerader Ordnung mit Vorzeichenwechsel (▸ S. 22).
Gerade Funktion ($f(-x) = f(x)$): Parabeln gerader Ordnung sind symmetrisch zur y-Achse.	Ungerade Funktion ($f(-x) = -f(x)$): Parabeln ungerader Ordnung sind punktsymmetrisch zum Ursprung.
Monotonie: In $]-\infty; 0]$ streng monoton abnehmend, in $[0; \infty[$ streng monoton zunehmend.	Monotonie: In $\mathbb{R}$ streng monoton zunehmend.
Globales Minimum bei $x = 0$.	Kein Extremum.

Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen Exponenten

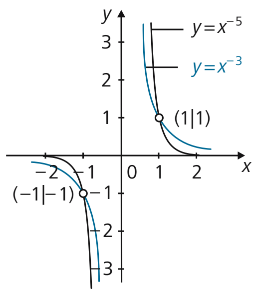
> Eine Funktion $f: x \mapsto x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt ebenfalls ***Potenzfunktion.*** Ihr Graph heißt ***Hyperbel n-ter Ordnung.*** Eine Hyperbel besteht jeweils aus zwei Teilen, den Hyperbelästen.
> Die maximale Definitionsmenge ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

BEISPIELE

- $f: x \mapsto x^{-2}$, $f: x \mapsto x^{-4}$



- $f: x \mapsto x^{-3}$, $f: x \mapsto x^{-5}$



Eigenschaften

Für gerades *n*:	**Für ungerades *n*:**
Wertemenge $W_f = \mathbb{R}^+$	Wertemenge $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Keine Nullstelle.	Keine Nullstelle.
Gerade Funktion ($f(-x) = f(x)$): Eine Hyperbel gerader Ordnung ist symmetrisch zur y-Achse.	Ungerade Funktion ($f(-x) = -f(x)$): Eine Hyperbel ungerader Ordnung ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
Monotonie: In $]-\infty; 0[$ streng monoton zunehmend, in $]0; \infty[$ streng monoton abnehmend.	Monotonie: In $]-\infty; 0[$ und in $]0; \infty[$ jeweils streng monoton abnehmend.
Für die Hyperbeln ist die x-Achse horizontale Asymptote für $x \mapsto \pm\infty$, die y-Achse vertikale Asymptote für $x \mapsto 0$ (▸ S. 25).	

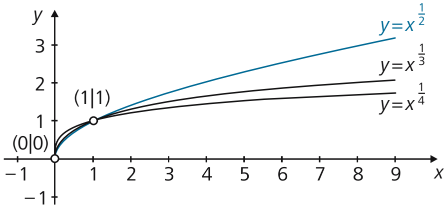
Allgemeine Wurzelfunktion

Eine Potenzfunktion $f\colon x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n > 1$ heißt wegen $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (allgemeine) ***Wurzelfunktion.*** Ihre Definitionsmenge ist $D_f = \mathbb{R}_0^+$, die Wertemenge $W_f = \mathbb{R}_0^+$.

Die Funktion ist in $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton zunehmend.
An der Nullstelle $x = 0$ befindet sich auch das globale Minimum.
Die Graphen der Wurzelfunktionen sind Parabeläste und gehen alle durch die Punkte (0|0) und (1|1).

BEISPIELE

- $y = x^{\frac{1}{2}}$
- $y = x^{\frac{1}{3}}$
- $y = x^{\frac{1}{4}}$



Umkehrbarkeit der Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$

AUGEN AUF! Die Potenzfunktionen $f\colon x \mapsto x^n$ mit **geradem Exponenten** $n \in \mathbb{N}$ sind nicht eineindeutig in $D_f = \mathbb{R}$. Sie sind deshalb nur abschnittsweise in den Bereichen strenger Monotonie umkehrbar. Für die Umkehrung gilt:

Bereich	Potenzfunktion f	Umkehrfunktion f^{-1}	$D_{f^{-1}}$
$]-\infty; 0]$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto -x^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{x}$	$[0; \infty[$
$[0; \infty[$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	$[0; \infty[$

BEISPIEL

$[0; \infty[$	$f\colon x \mapsto x^4$	$f^{-1}\colon x \mapsto x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$	$[0; \infty[$

Graph siehe oben.

Analog gilt bei negativen Exponenten für $f\colon x \mapsto x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$:

Bereich	Potenzfunktion f	Umkehrfunktion f^{-1}	$D_{f^{-1}}$
$]-\infty; 0[$	$x \mapsto x^{-n}$	$x \mapsto -x^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$]0; \infty[$
$]0; \infty[$	$x \mapsto x^{-n}$	$x \mapsto x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$]0; \infty[$

BEISPIEL

$]0; \infty[$	$f\colon x \mapsto x^{-4}$	$f^{-1}\colon x \mapsto x^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$	$]0; \infty[$

Graph ▶ S. 20 (untere Abbildung).

Die Potenzfunktionen $f\colon x \mapsto x^n$ mit **ungeradem Exponenten** n sind eindeutig auf $D_f = \mathbb{R}$. Sie sind deshalb in ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar. Es gilt

für positive Exponenten:

$$f^{-1}\colon x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x},\ x \geq 0 \\ -|x|^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{|x|},\ x < 0 \end{cases}$$

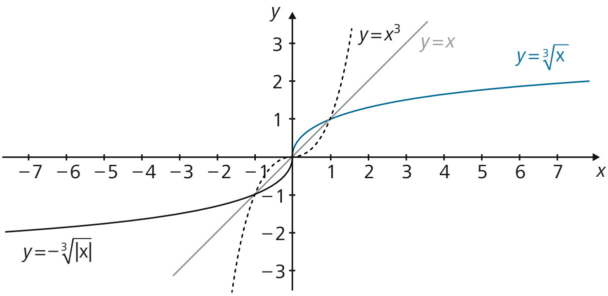
für negative Exponenten:

$$f^{-1}\colon x \mapsto \begin{cases} x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}},\ x > 0 \\ -|x|^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{\sqrt[n]{|x|}},\ x < 0 \end{cases}$$

BEISPIEL

$f\colon x \mapsto x^3$,

$$f^{-1}\colon x \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{x},\ x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|},\ x < 0 \end{cases}$$



Thema:
Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

$f: x \mapsto x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n}$ ist ein gekürzter Bruch ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$).

Eigenschaften	für $\frac{m}{n} > 0$	für $\frac{m}{n} < 0$
Maximale Definitionsmenge	$D_f = \mathbb{R}_0^+$	$D_f = \mathbb{R}^+$
Wertemenge	$W_f = \mathbb{R}_0^+$	$W_f = \mathbb{R}^+$
Graph	Parabel $\frac{m}{n}$-ter Ordnung	Hyperbel $\frac{m}{n}$-ter Ordnung
Nullstelle	$x = 0$	keine
Extremstelle	$x = 0$ (globales Minimum)	keine
Monotonie	in $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton zunehmend	in $\mathbb{R}^+$ streng monoton abnehmend
Gemeinsame Punkte	$(0\|0)$, $(1\|1)$	$(1\|1)$
Asymptote	keine	x- und y-Achse

Die Funktionen $f: x \mapsto x^{\frac{m}{n}}$ und $g: x \mapsto x^{\frac{n}{m}}$ sind zueinander Umkehrfunktionen. Ihre Graphen liegen daher zueinander symmetrisch bezüglich der Geraden $y = x$ (Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten).

BEISPIELE

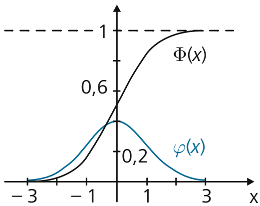
- $y = x^{\frac{5}{2}}$ und $y = x^{\frac{2}{5}}$
- $y = x^{-\frac{2}{3}}$ und $y = x^{-\frac{3}{2}}$
- $y = x^6$ und $y = x^{\frac{1}{6}}$
- $y = x^{-4}$ und $y = x^{-\frac{1}{4}}$

Die Graphen verlaufen jeweils in den nicht weiß hinterlegten Bereichen.

Normalverteilung

Die Funktion φ: $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, heißt ***Gauß-Funktion,***
ihr glockenförmiger Graph heißt ***Gauß-Kurve.***

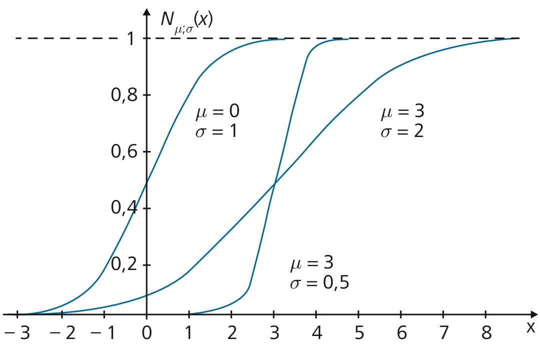
Die Funktion Φ: $x \rightarrow \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2}\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$,
heißt ***Gauß'sche Integralfunktion*** (▶ S. 58).



Die Werte der Funktionen φ und Φ findet man für verschiedene Werte von x in Tabellen. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:
$\varphi(-x) = \varphi(x)$;
$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Eine stetige Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2 heißt ***normalverteilt*** nach $N_{\mu;\sigma}$, wenn

$N_{\mu;\sigma}$: $x \mapsto N_{\mu;\sigma}(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



5

SATZ

Für die Binomialverteilung $B_{n;p}$ gilt:

$$B_{n;p}(k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

(Lokale Näherungsformel von de Moivre-Laplace)

Für $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q > 9$ erhält man brauchbare Werte.

BEISPIEL $n = 100$, $p = 0{,}5$, $k = 60$. $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 25 > 9$;

$\mu = n \cdot p = 50$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{25} = 5$.

$$B(100; 0{,}5; 60) \approx \frac{1}{5} \cdot \varphi\left(\frac{60-50}{5}\right) = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{60-50}{5}\right)^2} \approx 0{,}010\,80.$$

Der Tabellenwert: $B(100; 0{,}5; 60) = 0{,}010\,84$.

SATZ

Für eine $B_{n;p}$-verteilte Zufallsgröße X gilt für großes n:

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} B_{n;p}(i) \approx \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t = \Phi(x),\ x = \frac{k + 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}.$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} B_{n;p}(i) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\mathrm{d}t = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

wobei $x_1 = \dfrac{k_1 - 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 + 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$.

(Globale Näherungsformel von de Moivre-Laplace)

Bei sehr großem n kann bei x_1 bzw. x_2 auf $-0{,}5$ bzw. $+0{,}5$ im Zähler verzichtet werden.

BEISPIEL

$n = 1000$, $p = 0{,}88$, $k_1 = 860$, $k_2 = 900$.

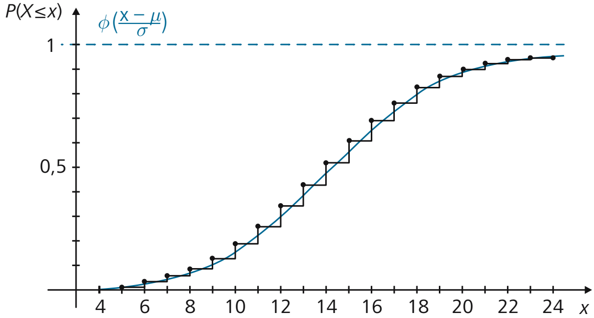
$\mu = n \cdot p = 880$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{105{,}6} \approx 10{,}28$.

$$x_1 = \frac{860 - 0{,}5 - 880}{\sqrt{105{,}6}} \approx -1{,}99;\ x_2 = \frac{900 + 0{,}5 - 880}{\sqrt{105{,}6}} \approx 1{,}99.$$

$$\sum_{k=860}^{900} B_{1000;0,88}(k) \approx \Phi(1{,}99) - \Phi(-1{,}99) = 2 \cdot \Phi(1{,}99) - 1$$

$$= 2 \cdot 0{,}976\,70 - 1 \approx 95{,}4\,\%$$

BEACHTE Eine binomialverteilte Zufallsgröße ist für großes n näherungsweise normalverteilt.



SATZ

Zentraler Grenzwertsatz: Ist eine Zufallsvariable X Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit Erwartungswerten μ_i und Varianzen $\mathrm{Var}(X_i)$, so gilt für hinreichend große Werte von n:
X ist annähernd normalverteilt, d. h. $P(X \leq x) \approx \Phi\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|$,
wobei $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ und $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$.

5

Stichwortverzeichnis

DUDEN

Dein Booster zum erfolgreichen Abitur!

- Effektive Prüfungsvorbereitung in kurzer Zeit
- Der wesentliche Abiturstoff in klarer, übersichtlicher Form
- Komplexe Themen verständlich und präzise erklärt

DAS ORIGINAL
Über 1 Mio. verkaufte Bücher
SEIT 2000

ISBN 978-3-411-77122-6
13 € (D) · 13,40 € (A)
9 783411 771226