

**DUDEN**

# Mathematik

POCKET TEACHER  
**ABI**

**Duden**

**POCKET TEACHER ABI**

# **Mathematik**

7., aktualisierte Auflage

Fritz Kammermeyer

Roland Zerpies

**Dudenverlag**

Berlin

---

### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Das Wort **Duden** ist für den Verlag Bibliographisches Institut GmbH als Marke geschützt.

Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Für die Inhalte der im Buch genannten Internetlinks, deren Verknüpfungen zu anderen Internetangeboten und Änderungen der Internetadressen übernimmt der Verlag keine Verantwortung und macht sich diese Inhalte nicht zu eigen. Ein Anspruch auf Nennung besteht nicht.

Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet.

© Duden 2022 D C B A

Bibliographisches Institut GmbH,  
Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Redaktionelle Leitung: David Harvie

Redaktion: Dr. Angelika Fallert-Müller, Michael Venhoff

Herstellung: Ditte Hoffmann

Umschlaggestaltung: 2issue, München

Layout / technische Umsetzung: LemmeDESIGN, Berlin

Sachzeichnungen: Lennart Fischer, Berlin

Druck und Bindung: AZ Druck und Datentechnik GmbH

Heisinger Straße 16, 87437 Kempten

Printed in Germany

ISBN 978-3-411-77122-6

# Inhalt

<b>Vorwort</b> . . . . .	7
<b>1 Funktionen</b> . . . . .	8
<b>1.1 Quadratische Funktionen und Wurzelfunktionen</b> . . . . .	8
Die quadratischen Funktionen . . . . .	8
Die Wurzelfunktionen . . . . .	10
<b>Thema: Form- und Lageänderungen von Funktionsgraphen</b> . . . . .	12
<b>1.2 Potenzfunktionen</b> . . . . .	15
Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten . . . . .	15
Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen Exponenten . . . . .	16
Allgemeine Wurzelfunktion . . . . .	17
Umkehrbarkeit der Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ . . . . .	17
<b>Thema: Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten</b> . . . . .	19
<b>1.3 Polynomfunktionen</b> . . . . .	21
Eigenschaften von Polynomfunktionen . . . . .	21
<b>Thema: Polynomdivision</b> . . . . .	23
<b>1.4 Rationale Funktionen</b> . . . . .	24
Eigenschaften rationaler Funktionen . . . . .	24
<b>Thema: Untersuchung einer gebrochenrationalen Funktion</b> . . . . .	26
<b>1.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen</b> . . . . .	28
Exponentialfunktionen . . . . .	28
Logarithmusfunktionen . . . . .	29
Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmusfunktionen . . . . .	30
<b>1.6 Trigonometrische Funktionen</b> . . . . .	30
Sinus- und Kosinusfunktion . . . . .	30
Tangensfunktion . . . . .	31
<b>2 Differentialrechnung</b> . . . . .	33
<b>2.1 Differenzierbarkeit</b> . . . . .	33
Differenzierbarkeit an einer Stelle . . . . .	33
Differenzierbarkeit in einem Intervall . . . . .	35
Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	36
<b>Thema: Differentiationsregeln</b> . . . . .	37
Ableitungen der Grundfunktionen . . . . .	39

<b>2.2</b>	<b>Eigenschaften von Funktionsgraphen und Ableitungen</b>	40
	Geometrische Bedeutung der 1. Ableitung	40
	Geometrische Bedeutung der 2. Ableitung	44
<b>3</b>	<b>Integralrechnung</b>	46
<b>3.1</b>	<b>Das bestimmte Integral</b>	46
	Flächenberechnung mit Obersumme und Untersumme	46
	Definition und Eigenschaften	48
<b>3.2</b>	<b>Stammfunktion und Integralfunktion</b>	50
	Definitionen, Beispiele, Sätze	50
	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	51
	Das unbestimmte Integral	51
<b>3.3</b>	<b>Integrationsverfahren</b>	52
	Integration durch Substitution	52
	Partielle Integration	56
	Integration durch Partialbruchzerlegung	57
<b>3.4</b>	<b>Uneigentliche Integrale</b>	58
	Integrale mit nicht beschränktem Integrationsbereich	58
	Integrale mit nicht beschränktem Integranden	59
<b>3.5</b>	<b>Anwendungen</b>	60
	Berechnung von Flächeninhalten	60
	Berechnung von Rauminhalten von Rotationskörpern	62
	Integrale in der Physik	62
<b>4</b>	<b>Lineare Algebra und Analytische Geometrie</b>	64
<b>4.1</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	64
	Homogene und inhomogene Gleichungssysteme	64
	Einsetzungs- und Additionsverfahren	64
	Matrizen	65
	Determinanten	66
	Das Gauß-Verfahren	67
	Die Cramer'sche Regel	69
	Übersicht über die Anzahl der Lösungen mit Deutungsmöglichkeiten im $\mathbf{R}^2$	71
	Übersicht über die Anzahl der Lösungen mit Deutungsmöglichkeiten im $\mathbf{R}^3$	72
<b>4.2</b>	<b>Vektoren</b>	73
	Grundbegriffe	73
	Grundlagen des Vektorrechnens	76
	Anwendungen	83

<b>4.3</b>	<b>Geraden</b>	90
	Darstellungen	90
	Lagebeziehungen	92
	<b>Thema: Lage von zwei Geraden</b>	94
	Schnitte von Geraden	97
	Schnittwinkel zwischen Geraden	98
	<b>Thema: Abstand bei Geraden</b>	99
	Abstandsberechnungen bei Geraden	100
<b>4.4</b>	<b>Ebenen</b>	101
	Festlegung einer Ebene	101
	Darstellungen	101
	Lagebeziehungen	107
	<b>Thema: Lage von Gerade und Ebene</b>	110
	<b>Thema: Lage von zwei Ebenen zueinander</b>	114
	Schnitte mit Ebenen	119
	<b>Thema: Spurpunkte und Spurgeraden</b>	124
	Schnittwinkel bei Ebenen	126
	<b>Thema: Abstand von Ebenen</b>	128
	Abstandsberechnungen bei Punkt und Ebene	129
	<b>Thema: Spiegelungen</b>	130
<b>4.5</b>	<b>Kreise und Kugeln</b>	131
	Kreis- und Kugelgleichungen	131
	<b>Thema: Polar- und Kugelkoordinaten</b>	133
	<b>Thema: Lagebeziehungen von Kreis und Kugel</b>	134
<b>4.6</b>	<b>Matrizen</b>	136
	Rechnen mit Matrizen	136
	<b>Thema: Abbildungsmatrizen</b>	138
	<b>Thema: Übergangsmatrizen</b>	139
<b>5</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	141
<b>5.1</b>	<b>Wahrscheinlichkeit</b>	141
	Zufallsexperimente	141
	Ereignisse	143
	Verknüpfung von Ereignissen	144
	Häufigkeiten von Ereignissen	145
	Die Axiome von Kolmogorow	146
	Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten	146
<b>5.2</b>	<b>Berechnung von Wahrscheinlichkeiten</b>	147
	Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	147
	Berechnungen bei Laplace-Experimenten	149
	Urnenmodelle	150

Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . . .	151
Unabhängigkeit . . . . .	153
<b>5.3 Zufallsgrößen</b> . . . . .	153
Grundbegriffe . . . . .	153
Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung . . . . .	155
<b>5.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b> . . . . .	156
Bernoulli-Kette. . . . .	156
<b>Thema: Standardaufgaben zu Bernoulli-Ketten</b> . . . . .	158
Binomialverteilung. . . . .	159
Ungleichungen von Tschebyschew. . . . .	160
Normalverteilung . . . . .	161
<b>Stichwortverzeichnis</b> . . . . .	164

# Vorwort

## **Liebe Schülerinnen und Schüler,**

auf der Zielgeraden zum Abitur in Mathematik soll Ihnen dieses Buch helfen, möglichst optimal vorbereitet und sicher in die anstehende Prüfung zu gehen.

Flankierend zu den persönlichen Aufzeichnungen bietet der Pocket Teacher Abi die perfekte Ergänzung zur effektiven Auffrischung und Festigung des Lernstoffs. Die komplexen Inhalte sind anhand von vielen Beispielen und Darstellungen anschaulich erklärt, klar gegliedert und auf das wirklich Wesentliche zusammengefasst.

Das umfangreiche Stichwortverzeichnis bietet außerdem die Möglichkeit, konkrete Fachbegriffe schnell zu finden und im Kontext zu verstehen.

Viel Erfolg bei den Prüfungen zum Abitur!

Ihr Dudenverlag



## 1

## Funktionen

## 1.1 Quadratische Funktionen und Wurzelfunktionen

## Die quadratischen Funktionen

Eine Funktion  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ , mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$  heißt **quadratische Funktion**.

Ihre maximale Definitionsmenge ist  $D_f = \mathbb{R}$  mit der Wertemenge  $W_f = [c - \frac{b^2}{4a}; \infty[$  für  $a > 0$  bzw.  $W_f = ]-\infty; c - \frac{b^2}{4a}]$  für  $a < 0$ .

## Nullstellen

Eine quadratische Funktion  $f$  hat entweder keine, eine oder zwei Nullstellen ( $f(x_0) = 0$ ). Die Anzahl der Nullstellen hängt vom Wert der **Diskriminante**  $D = b^2 - 4ac$  der zugehörigen quadratischen Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ab. Für  $D < 0$  besitzt  $f$  keine Nullstelle.

Für  $D = 0$  hat  $f$  genau eine Nullstelle:  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .

Für  $D > 0$  gibt es genau zwei Nullstellen:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Besitzt  $f$  Nullstellen, so lässt sich  $f(x)$  **in Faktoren zerlegen**:

$f(x) = a \cdot (x - x_0)^2$  bei einer (doppelten) Nullstelle  $x_0$ ,

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$  bei zwei Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$ .

## BEISPIELE

◆  $f(x) = x^2 + 2$ ;  $D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -8 < 0 \Rightarrow f$  hat keine Nullstelle.

◆  $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ ;  $D = 16 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow f$  hat genau eine Nullstelle:  
 $x_0 = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$ .

Faktorzerlegung:  $f(x) = 2 \cdot (x - 1)^2$ .

◆  $f(x) = 3x^2 - 3$ ;  $D = 0 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 36 > 0 \Rightarrow f$  hat genau zwei Nullstellen:  
 $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$ .

Faktorzerlegung:  $f(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$ .

## Graph

Der Graph ist eine Parabel mit  $y = ax^2 + bx + c$ . Für  $a > 0$  ist die Parabel nach oben geöffnet, für  $a < 0$  nach unten geöffnet. Je kleiner  $|a|$ , desto flacher verläuft sie. Der höchste (für  $a < 0$ ) bzw. tiefste (für  $a > 0$ ) Punkt der Parabel heißt **Scheitel**  $S(s|t)$ .

$$\text{Es gilt: } S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

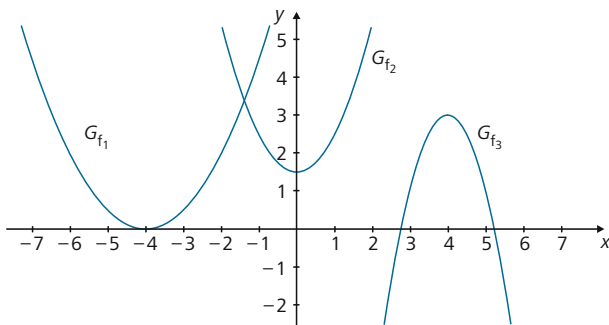
Der Graph ist symmetrisch zur Geraden  $x = s$  durch den Scheitel. Liegt der Scheitel auf der  $x$ -Achse, d. h.  $t = 0$ , dann hat  $f$  genau eine doppelte Nullstelle.

Jede quadratische Funktion  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$  lässt sich auf die **Scheitelform**  $f: x \mapsto a(x - s)^2 + t$  mit  $s, t \in \mathbb{R}$  bringen.

Der Graph  $G_f$  zu  $f: x \mapsto a(x - s)^2 + t$  entsteht aus der Normalparabel durch Form- und Lageveränderungen (► S. 12 f.).

### BEISPIELE

- ◆  $f_1: x \mapsto 0,5x^2 + 4x + 8 = 0,5(x + 4)^2$   
 $S(-4|0)$ ;  $W_{f_1} = [0; \infty[$ ; eine doppelte Nullstelle
- ◆  $f_2: x \mapsto x^2 + 1,5$   
 $S(0|1,5)$ ;  $W_{f_2} = [1,5; \infty[$ ; keine Nullstelle
- ◆  $f_3: x \mapsto -2x^2 + 16x - 29 = -2(x - 4)^2 + 3$   
 $S(4|3)$ ;  $W_{f_3} = ]-\infty, 3]$ ; zwei Nullstellen



## Bestimmung der Koordinaten des Scheitels $S(s|t)$

**1. Möglichkeit:** Einsetzen der Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  in die allgemeine Form der Scheitelkoordinaten.

**BEISPIEL**  $y = -2x^2 + 16x - 29$  (3. Beispiel oben):

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2 \cdot (-2)} = 4, \quad t = c - \frac{b^2}{4a} = -29 - \frac{16^2}{4 \cdot (-2)} = 3;$$

Scheitel  $S(4|3)$ .

**2. Möglichkeit:** Aus der *Scheitelform*  $y = a \cdot (x - s)^2 + t$  sind die Scheitelkoordinaten  $S(s|t)$  ablesbar. Die Scheitelform erhält man aus der Normalform durch *quadratische Ergänzung*.

**BEISPIEL**

$$y = -2x^2 + 16x - 29$$

$$= -2 \cdot (x^2 - 8x + 14,5)$$

$$= -2 \cdot \left( x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 14,5 \right)$$

$$= -2 \cdot [(x - 4)^2 - 1,5]$$

$$= -2 \cdot (x - 4)^2 + 3.$$

Somit:  $S(4|3)$ .

Ausklammern von  $-2$

Quadratische Ergänzung

Zusammenfassen des Binoms

Ausmultiplizieren

**3. Möglichkeit:** Bestimmung der 1. Scheitelkoordinate  $s$  als Nullstelle der Ableitung  $f'$  von  $f$  (► S. 34). Für die 2. Scheitelkoordinate  $t$  gilt:  $t = f(s)$ .

**BEISPIEL**  $y = x^2 + 1,5$ ; (2. Beispiel ► S. 9):

Für die Ableitung gilt:  $y' = 2x$ ;  $y' = 0 \Rightarrow s = 0$ ;  $t = f(0) = 1,5$ .

Scheitel  $S(0|1,5)$ .

## Die Wurzelfunktionen

Quadratische Funktionen sind auf  $\mathbb{R}$  nicht umkehrbar, da sie nicht eindeutig sind. Durch Einschränkung der Definitionsmenge auf Bereiche mit strenger Monotonie können abschnittsweise Umkehrfunktionen bestimmt werden.

### Umkehrung der Quadratfunktion

**AUGEN AUF!** Die Quadratfunktion  $f: x \mapsto x^2$  ist für die Einschränkungen auf  $D_1 = [0; \infty[$  bzw.  $D_2 = ]-\infty; 0]$  umkehrbar.

$$f_1: x \mapsto x^2, D_1 = [0; \infty[:$$

Die Umkehrfunktion ist die *Wurzelfunktion*  $g_1: x \mapsto \sqrt{x}$  mit  $D = \mathbb{R}_0^+$  und  $W = \mathbb{R}_0^+$ .

Die Wurzelfunktion ist streng monoton zunehmend, ihr globales Minimum ist am Rand von  $D_1$  bei  $x = 0$ .

$$f_2: x \mapsto x^2, D_2 = ]-\infty; 0]:$$

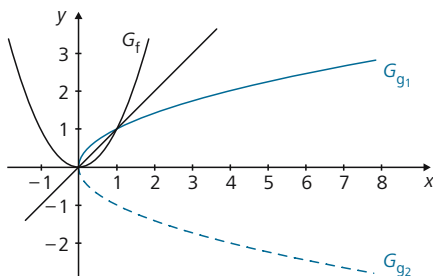
Die Umkehrfunktion ist hier die Funktion  $g_2: x \mapsto -\sqrt{x}$  mit  $D = \mathbb{R}_0^+$  und  $W = \mathbb{R}_0^-$ . Sie ist streng monoton abnehmend, ihr globales Maximum ist am Rand von  $D_2$  bei  $x = 0$ . Ihr Graph entsteht aus dem Graphen der Wurzelfunktion durch Spiegelung an der  $x$ -Achse.

Die Graphen von

$$f: x \mapsto x^2,$$

$$g_1: x \mapsto \sqrt{x},$$

$$g_2: x \mapsto -\sqrt{x}$$



### Umkehrungen quadratischer Funktionen

**AUGEN AUF!** Die allgemeine quadratische Funktion

$f: x \mapsto ax^2 + bx + c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$  ist für die Einschränkungen auf die Bereiche  $D_1 = \left[-\frac{b}{2a}; \infty\right[$  bzw.  $D_2 = \left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$  umkehrbar (die Bereiche jeweils „links bzw. rechts vom Scheitel“).

Die Vorschriften für die jeweilige Umkehrung erhält man aus der Funktionsgleichung  $y = ax^2 + bx + c$  durch Auflösen nach  $x$  und anschließendem Variablentausch.

Thema: \_\_\_\_\_

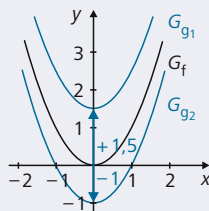
**Form- und Lageänderungen von Funktionsgraphen****1 Addition einer Konstanten zum Funktionsterm**

$$g(x) = f(x) + a, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Der Graph  $G_g$  der Funktion  $g$  entsteht durch Verschiebung des Graphen  $G_f$  um  $|a|$  in positive  $y$ -Richtung (also nach oben) für  $a > 0$  und in negative  $y$ -Richtung (also nach unten) für  $a < 0$ .

**BEISPIELE**

- ◆  $f(x) = x^2$
- ◆  $g_1(x) = x^2 + 1,5$
- ◆  $g_2(x) = x^2 - 1$

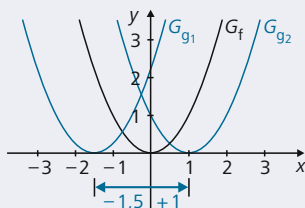
**2 Addition einer Konstanten zum Argument der Funktion**

$$g(x) = f(x + b), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Der Graph  $G_g$  der Funktion  $g$  entsteht durch Verschiebung des Graphen  $G_f$  um  $|b|$  in negative  $x$ -Richtung (also nach links) für  $b > 0$  und in positive  $x$ -Richtung (also nach rechts) für  $b < 0$ .

**BEISPIELE**

- ◆  $f(x) = x^2$
- ◆  $g_1(x) = (x + 1,5)^2$
- ◆  $g_2(x) = (x - 1)^2$

**3 Multiplikation des Funktionsterms mit einer Konstanten**

$$g(x) = c \cdot f(x), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

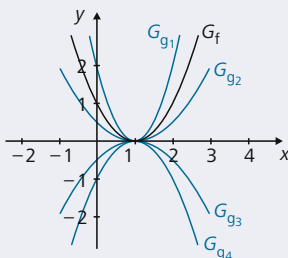
Der Graph  $G_g$  der Funktion  $g$  entsteht durch eine Streckung oder Stauchung des Graphen  $G_f$  in  $y$ -Richtung. Dabei bleiben die Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse (Nullstellen) erhalten.

Fallunterscheidung:

- $c > 1$ : Streckung parallel zur  $y$ -Achse; Streckfaktor  $c$
- $0 < c < 1$ : Stauchung parallel zur  $y$ -Achse; Streckfaktor  $c$
- $-1 < c < 0$ : Spiegelung an der  $x$ -Achse und anschließende Stauchung parallel zur  $y$ -Achse; Streckfaktor  $|c|$
- $c = -1$ : Spiegelung an der  $x$ -Achse:  $g(x) = -1 \cdot f(x) = -f(x)$
- $c < -1$ : Spiegelung an der  $x$ -Achse und anschließende Streckung parallel zur  $y$ -Achse; Streckfaktor  $|c|$

### BEISPIELE

- ◆  $f(x) = (x - 1)^2$
- ◆  $g_1(x) = 2(x - 1)^2$
- ◆  $g_2(x) = 0,5(x - 1)^2$
- ◆  $g_3(x) = -0,5(x - 1)^2$
- ◆  $g_4(x) = -(x - 1)^2$



**BEACHT E** Die Graphen zu  $y = c \cdot f(x)$  und  $y = -c \cdot f(x)$  sind zueinander symmetrisch bezüglich der  $x$ -Achse.

## 4 Multiplikation des Arguments mit einer Konstanten

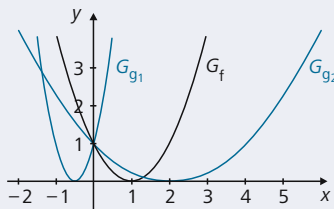
$$g(x) = f(d \cdot x), d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Der Graph  $G_g$  der Funktion  $g$  entsteht durch eine Streckung oder Stauchung des Graphen  $G_f$  in  $x$ -Richtung. Dabei bleibt der Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse erhalten. Fallunterscheidung:

- $d > 1$ : Stauchung parallel zur  $x$ -Achse; Streckfaktor  $\frac{1}{d}$
- $d = 1$ : identische Abbildung
- $0 < d < 1$ : Streckung parallel zur  $x$ -Achse; Streckfaktor  $\frac{1}{d}$
- $-1 < d < 0$ : Spiegelung an der  $y$ -Achse und anschließende Streckung parallel zur  $x$ -Achse; Streckfaktor  $\left|\frac{1}{d}\right|$
- $d = -1$ : Spiegelung an der  $y$ -Achse:  $g(x) = f(-1 \cdot x) = f(-x)$
- $d < -1$ : Spiegelung an der  $y$ -Achse und anschließende Stauchung parallel zur  $x$ -Achse; Streckfaktor  $\left|\frac{1}{d}\right|$

### BEISPIELE

- ◆  $f(x) = (x - 1)^2$
- ◆  $g_1(x) = (-2x - 1)^2$
- ◆  $g_2(x) = (0,5x - 1)^2$



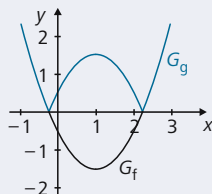
**BEACHTEN** Die Graphen zu  $y = f(d \cdot x)$  und  $y = f(-d \cdot x)$  sind zueinander symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse.

## 5 Betrag und Funktionsterm

### Betrag des Funktionsterms: $g(x) = |f(x)|$

Der Graph  $G_g$  der Funktion  $g$  entsteht durch eine Spiegelung der unter der  $x$ -Achse liegenden Teile von  $G_f$  an der  $x$ -Achse. Dabei bleiben die Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse erhalten.

**BEISPIEL**  $f(x) = x^2 - 2x - 0,5$ ;  
 $g(x) = |x^2 - 2x - 0,5|$



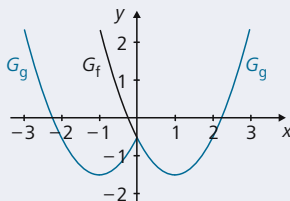
### Betrag des Arguments: $g(x) = f(|x|)$

Den Argumenten  $x$  und  $-x$  wird nun derselbe Funktionswert zugeordnet, der Graph  $G_g$  liegt symmetrisch zur  $y$ -Achse.

Entstehung des Graphen  $G_g$  aus dem Graphen  $G_f$ : Die links von der  $y$ -Achse liegenden Teile von  $G_f$  werden durch die Spiegelbilder (an der  $y$ -Achse) der rechts von der  $y$ -Achse liegenden Teile von  $G_f$  ersetzt. Der Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse bleibt erhalten.

#### BEISPIEL

$f(x) = x^2 - 2x - 0,5$ ;  
 $g(x) = |x|^2 - 2|x| - 0,5$



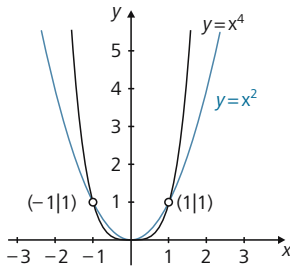
## 1.2 Potenzfunktionen

### Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

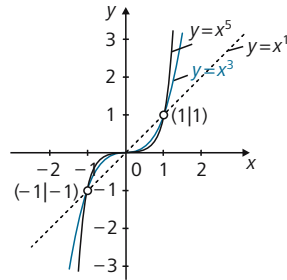
Eine Funktion  $f: x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heißt **Potenzfunktion**. Ihr Graph heißt **Parabel  $n$ -ter Ordnung**. Die maximale Definitionsmenge ist  $D_f = \mathbb{R}$ .

#### BEISPIELE

◆  $f: x \mapsto x^2, f: x \mapsto x^4$



◆  $f: x \mapsto x^1, f: x \mapsto x^3, f: x \mapsto x^5$



#### Eigenschaften

Für gerades $n$ :	Für ungerades $n$ :
Wertemenge $W_f = \mathbb{R}_0^+$	Wertemenge $W_f = \mathbb{R}$
$x = 0$ ist Nullstelle gerader Ordnung ohne Vorzeichenwechsel (► S. 22).	$x = 0$ ist Nullstelle ungerader Ordnung mit Vorzeichenwechsel (► S. 22).
Gerade Funktion ( $f(-x) = f(x)$ ): Parabeln gerader Ordnung sind symmetrisch zur $y$ -Achse.	Ungerade Funktion ( $f(-x) = -f(x)$ ): Parabeln ungerader Ordnung sind punktsymmetrisch zum Ursprung.
Monotonie: In $]-\infty; 0]$ streng monoton abnehmend, in $[0; \infty[$ streng monoton zunehmend.	Monotonie: In $\mathbb{R}$ streng monoton zunehmend.
Globales Minimum bei $x = 0$ .	Kein Extremum.



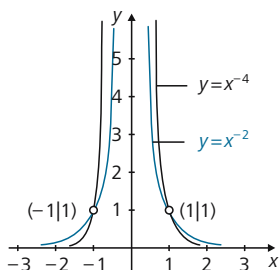
## Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen Exponenten

Eine Funktion  $f: x \mapsto x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heißt ebenfalls **Potenzfunktion**. Ihr Graph heißt **Hyperbel  $n$ -ter Ordnung**. Eine Hyperbel besteht jeweils aus zwei Teilen, den Hyperbelästen.

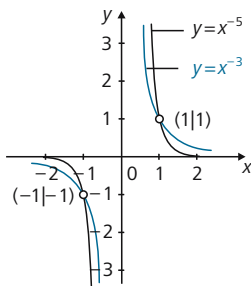
Die maximale Definitionsmenge ist  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

### BEISPIELE

◆  $f: x \mapsto x^{-2}, f: x \mapsto x^{-4}$



◆  $f: x \mapsto x^{-3}, f: x \mapsto x^{-5}$



### Eigenschaften

Für gerades $n$ :	Für ungerades $n$ :
Wertemenge $W_f = \mathbb{R}^+$	Wertemenge $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Keine Nullstelle.	Keine Nullstelle.
Gerade Funktion ( $f(-x) = f(x)$ ): Eine Hyperbel gerader Ordnung ist symmetrisch zur $y$ -Achse.	Ungerade Funktion ( $f(-x) = -f(x)$ ): Eine Hyperbel ungerader Ordnung ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
Monotonie: In $]-\infty; 0[$ streng monoton zunehmend, in $]0; \infty[$ streng monoton abnehmend.	Monotonie: In $]-\infty; 0[$ und in $]0; \infty[$ jeweils streng monoton abnehmend.
Für die Hyperbeln ist die $x$ -Achse horizontale Asymptote für $x \mapsto \pm\infty$ , die $y$ -Achse vertikale Asymptote für $x \mapsto 0$ (S. 25).	

## Allgemeine Wurzelfunktion

Eine Potenzfunktion  $f: x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $n > 1$  heißt wegen  $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$  (allgemeine) **Wurzelfunktion**. Ihre Definitionsmenge ist  $D_f = \mathbb{R}_0^+$ , die Wertemenge  $W_f = \mathbb{R}_0^+$ .

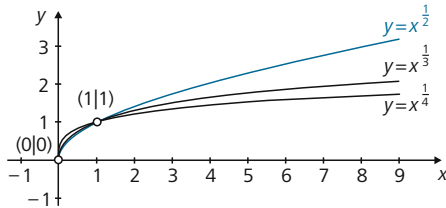
Die Funktion ist in  $\mathbb{R}_0^+$  streng monoton zunehmend.

An der Nullstelle  $x = 0$  befindet sich auch das globale Minimum.

Die Graphen der Wurzelfunktionen sind Parabeläste und gehen alle durch die Punkte  $(0|0)$  und  $(1|1)$ .

### BEISPIELE

- ◆  $y = x^{\frac{1}{2}}$
- ◆  $y = x^{\frac{1}{3}}$
- ◆  $y = x^{\frac{1}{4}}$



## Umkehrbarkeit der Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$

**AUGEN AUF!** Die Potenzfunktionen  $f: x \mapsto x^n$  mit **geradem Exponenten**  $n \in \mathbb{N}$  sind nicht eineindeutig in  $D_f = \mathbb{R}$ . Sie sind deshalb nur abschnittsweise in den Bereichen strenger Monotonie umkehrbar. Für die Umkehrung gilt:

Bereich	Potenzfunktion $f$	Umkehrfunktion $f^{-1}$	$D_{f^{-1}}$
$]-\infty; 0]$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto -x^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{x}$	$[0; \infty[$
$[0; \infty[$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	$[0; \infty[$

### BEISPIEL

$[0; \infty[ \quad | \quad f: x \mapsto x^4$

$| \quad f^{-1}: x \mapsto x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

$| \quad [0; \infty[$

Graph siehe oben.

Analog gilt bei negativen Exponenten für  $f: x \mapsto x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

Bereich	Potenzfunktion $f$	Umkehrfunktion $f^{-1}$	$D_{f^{-1}}$
$]-\infty; 0[$	$x \mapsto x^{-n}$	$x \mapsto -x^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$]0; \infty[$
$]0; \infty[$	$x \mapsto x^{-n}$	$x \mapsto x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$]0; \infty[$

**BEISPIEL**

$]0; \infty[$  |  $f: x \mapsto x^{-4}$  |  $f^{-1}: x \mapsto x^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$  |  $]0; \infty[$   
 Graph ▶ S. 20 (untere Abbildung).

Die Potenzfunktionen  $f: x \mapsto x^n$  mit **ungeradem Exponenten**  $n$  sind eindeutig auf  $D_f = \mathbb{R}$ . Sie sind deshalb in ganz  $\mathbb{R}$  umkehrbar. Es gilt

für positive Exponenten:

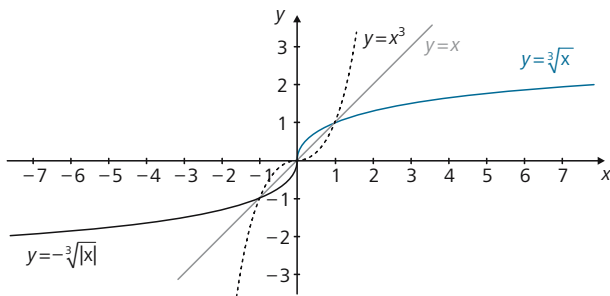
$$f^{-1}: x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, & x \geq 0 \\ -|x|^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$

für negative Exponenten:

$$f^{-1}: x \mapsto \begin{cases} x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}, & x > 0 \\ -|x|^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{\sqrt[n]{|x|}}, & x < 0 \end{cases}$$

**BEISPIEL**

$$f: x \mapsto x^3, \\ f^{-1}: x \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$



## Thema: \_\_\_\_\_

### Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

$f: x \mapsto x^{\frac{m}{n}}$ ,  $\frac{m}{n}$  ist ein gekürzter Bruch ( $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ).

Eigenschaften	für $\frac{m}{n} > 0$	für $\frac{m}{n} < 0$
Maximale Definitionsmenge	$D_f = \mathbb{R}_0^+$	$D_f = \mathbb{R}^+$
Wertemenge	$W_f = \mathbb{R}_0^+$	$W_f = \mathbb{R}^+$
Graph	Parabel $\frac{m}{n}$ -ter Ordnung	Hyperbel $\frac{m}{n}$ -ter Ordnung
Nullstelle	$x = 0$	keine
Extremstelle	$x = 0$ (globales Minimum)	keine
Monotonie	in $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton zunehmend	in $\mathbb{R}^+$ streng monoton abnehmend
Gemeinsame Punkte	(0 0), (1 1)	(1 1)
Asymptote	keine	$x$ - und $y$ -Achse

Die Funktionen  $f: x \mapsto x^{\frac{m}{n}}$  und  $g: x \mapsto x^{\frac{n}{m}}$  sind zueinander Umkehrfunktionen. Ihre Graphen liegen daher zueinander symmetrisch bezüglich der Geraden  $y = x$  (Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten).

#### BEISPIELE

$$\blacklozenge y = x^{\frac{5}{2}} \text{ und } y = x^{\frac{2}{5}}$$

$$\blacklozenge y = x^{-\frac{2}{3}} \text{ und } y = x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\blacklozenge y = x^6 \text{ und } y = x^{\frac{1}{6}}$$

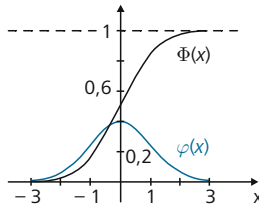
$$\blacklozenge y = x^{-4} \text{ und } y = x^{-\frac{1}{4}}$$

Die Graphen verlaufen jeweils in den nicht weiß hinterlegten Bereichen.

### Normalverteilung

Die Funktion  $\varphi: x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , heißt **Gauß-Funktion**, ihr glockenförmiger Graph heißt **Gauß-Kurve**.

Die Funktion  $\Phi: x \rightarrow \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , heißt **Gauß'sche Integralfunktion** (► S. 58).



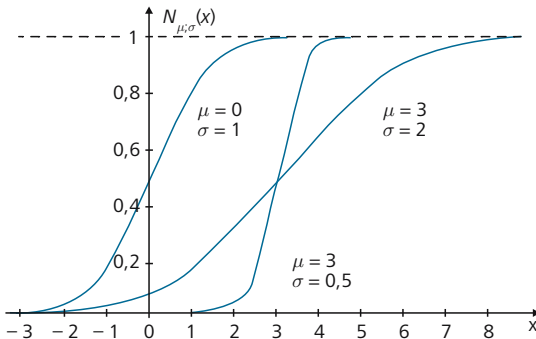
Die Werte der Funktionen  $\varphi$  und  $\Phi$  findet man für verschiedene Werte von  $x$  in Tabellen. Es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi(-x) = \varphi(x);$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Eine stetige Zufallsgröße  $X$  mit dem Erwartungswert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$  heißt **normalverteilt** nach  $N_{\mu; \sigma^2}$ , wenn

$$N_{\mu; \sigma^2}: x \mapsto N_{\mu; \sigma^2}(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$



**SATZ**

Für die Binomialverteilung  $B_{n;p}$  gilt:

$$B_{n;p}(k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

mit  $\mu = n \cdot p$  und  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ .

**(Lokale Näherungsformel von de Moivre-Laplace)**

Für  $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q > 9$  erhält man brauchbare Werte.

**BEISPIEL**  $n = 100, p = 0,5, k = 60. \sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 25 > 9;$

$\mu = n \cdot p = 50$  und  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{25} = 5.$

$$B(100; 0,5; 60) \approx \frac{1}{5} \cdot \varphi\left(\frac{60-50}{5}\right) = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{60-50}{5}\right)^2} \approx 0,01080.$$

Der Tabellenwert:  $B(100; 0,5; 60) = 0,01084.$

**SATZ**

Für eine  $B_{n;p}$ -verteilte Zufallsgröße  $X$  gilt für großes  $n$ :

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k B_{n;p}(i) \approx \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \Phi(x), \quad x = \frac{k + 0,5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}.$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} B_{n;p}(i) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t) dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{wobei } x_1 = \frac{k_1 - 0,5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}; \quad x_2 = \frac{k_2 + 0,5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}.$$

**(Globale Näherungsformel von de Moivre-Laplace)**

Bei sehr großem  $n$  kann bei  $x_1$  bzw.  $x_2$  auf  $-0,5$  bzw.  $+0,5$  im Zähler verzichtet werden.

**BEISPIEL**

$n = 1000, p = 0,88, k_1 = 860, k_2 = 900.$

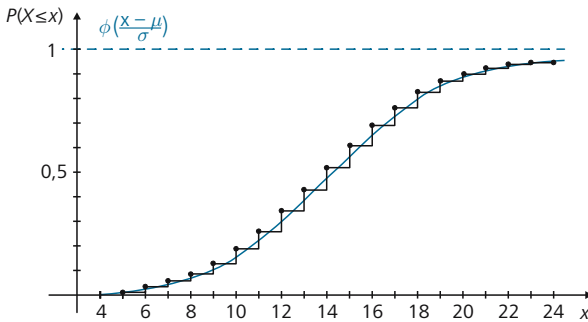
$\mu = n \cdot p = 880$  und  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{105,6} \approx 10,28.$

$$x_1 = \frac{860 - 0,5 - 880}{\sqrt{105,6}} \approx -1,99; \quad x_2 = \frac{900 + 0,5 - 880}{\sqrt{105,6}} \approx 1,99.$$

$$\sum_{k=860}^{900} B_{1000;0,88}(k) \approx \Phi(1,99) - \Phi(-1,99) = 2 \cdot \Phi(1,99) - 1$$

$$= 2 \cdot 0,97670 - 1 \approx 95,4\%$$

**BEACHTEN** Eine binomialverteilte Zufallsgröße ist für großes  $n$  näherungsweise normalverteilt.

**SATZ**

**Zentraler Grenzwertsatz:** Ist eine Zufallsvariable  $X$  Summe von  $n$  unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mit Erwartungswerten  $\mu_i$  und Varianzen  $\text{Var}(X_i)$ , so gilt für hinreichend große Werte von  $n$ :

$X$  ist annähernd normalverteilt, d. h.  $P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ ,

wobei  $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n \mu_i$  und  $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$ .

# Stichwortverzeichnis

- Abbildungsmatrix** 138
- abhängige Ereignisse 153
- Ableitung 34 f.
  - Differentiationsregeln 37 f.
  - der Grundfunktionen 39
  - höherer Ordnung 36
- Ableitungsfunktion 35
- absolute Häufigkeit 145
- Abstand
  - bei Geraden 99
  - von Ebenen 128
- Abstandsberechnung
  - bei Geraden 100
  - Punkt/Ebene 129
- Achsenabschnittsform 91, 103, 106
- Achsensymmetrie 21
- Additionsverfahren 64
- allgemeiner Multiplikationssatz 152
- Arbeitsintegral 62
- Asymptote 25
- äußere Funktion 38
- Axiome von Kolmogorow 146 f.
  
- Basis des Vektorraums** 75
- Baumdiagramm 141, 148
- bedingte relative Häufigkeit 152
- bedingte relative Wahrscheinlichkeit 152
- Bernoulli-Experiment 156
- Bernoulli-Kette 156 f.
  - Standardaufgaben 158
- Beschränktheit 21
- bestimmtes Integral 46, 48 f.
- Betrag
  - Funktionsterm 14
  - Vektor 79
- Binomialkoeffizient 157
- Binomialverteilung 156, 159, 162
  
- Cramer'sche Regel** 69
  
- Definitionslücke** 24
- Determinante 66
- Determinantensätze 67
- Diagonalmatrix 66
- Differentialquotient 34
- Differenzenquotient 33
- Differenzierbarkeit
  - an einer Stelle 33 f.
  - in einem Intervall 35
- Differenzierbarkeitsmenge 35
- Dimension des Vektorraums 75
- disjunkte Ereignisse 145
- Diskriminante 8
- Distributivgesetz 74, 137
- Drehung 138
- Dreiecksmatrix 66
- Drei-Mindestens-Aufgabe 158
- Drei-Punkte-Form 102
- dreireihige Determinante 66
  
- Ebenen**
  - Darstellung 101 f.
  - Festlegung 101
  - identische 114 f., 118
  - orthogonale 117 f.
  - parallele 114 f., 118
  - Schnittgerade 114 f., 118
  - Schnittwinkel 127
- Ebenengleichung 102
  - Normalenform 111, 114, 117
  - Parameterform 110, 114, 116
  - Umwandlung 105
- Einheitsvektor 80
- Einschränkung 10
- Einsetzungsverfahren 64
- Elementarereignis 143



- Ereignis 143, 145
- Ereignisraum 143
- Ergebnis 141
- Ergebnisraum 141
- Erwartungswert 155
- Exponentialfunktion 28
- Extremwert 42
  
- F**aktorzerlegung 8
- Flächeninhalt (Flächenmaßzahl) 82, 89
  - zwischen Graph und Koordinatenachse 60
  - zwischen zwei Graphen 61
- Formel von Bernoulli 157
- Funktionsgleichung 12
- Funktionsgraph 12
  
- g**anzrationale Funktion 21, 24
- Gauß'sche Integralfunktion 58, 161
- Gauß-Funktion 161
- Gauß-Kurve 161
- Gauß-Verfahren 67
- gebrochenrationale Funktion 24, 26 f.
- Gegenereignis 143
- Gegenvektor 73
- Gerade
  - Darstellung 90
  - Lage im Koordinatensystem 93
  - liegt in Ebene 110 f.
  - Schnittwinkel 98
- gerade Funktion 15 f., 21
- Geradengleichung 90, 92
- gerichteter Abstand 129
- geschlossene Vektorkette 74
- Gesetz der großen Zahlen 160
- Gesetze von de Morgan 144
- Gleichsetzungsverfahren 72
- Gleichungssysteme 64
- globales Maximum/Minimum 10, 15
- Grad einer Polynomfunktion 21
- Grenzwertsatz 163
- Grundintegrale 52
  
- H**äufigkeit 145
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 51
- Hesse'sche Normalenform (HNF) 91, 104, 106
- homogenes Gleichungssystem 64
- Hyperbel n-ter Ordnung 16
  
- i**dentische Abbildung 13
- identische Geraden 94 f.
- inhomogenes Gleichungssystem 64
- innere Funktion 38
- Integral
  - bestimmtes 46 f.
  - unbestimmtes 51 f.
  - uneigentliches 58 f.
- Integralfunktion 50
- Integralrechnung 46 ff.
- Integrandenfunktion 48, 50
- Integration 48 f.
  - durch Substitution 52
  - partielle 56
- Integrationsbereich 48
- Integrationsformel 51
- Integrationsverfahren 52 f.
  
- k**artesische Koordinaten 133
- kartesisches Koordinatensystem 76, 104
- Kettenregel 38
  - Umkehrung 52
- Koeffizienten 9, 21, 64
- kollinear 74
- Kolmogorow-Axiome 146
- Kommutativgesetz 74, 136
- komplanar 75
- Komponentendarstellung des Vektors 76
- konkav 44
- konvex 44
- Koordinate 76
- Koordinatenachse 76
- Koordinatendarstellung des Vektors 76
- Koordinatenebene 77, 108

- Koordinatenform 103
- Koordinatensprung 76
- Kosinusfunktion 30f.
- Kosinuskurve 30
- Kreisgleichung 131
- Krümmungsverhalten 44
- Kugelgleichung 132
- Kugelkoordinaten 133
  
- L**agebeziehung
  - Ebene/Ebene 114, 116
  - Ebene im Koordinatensystem 107
  - Gerade/Ebene 110, 112f.
  - Gerade/Gerade 94
  - Gerade im Koordinatensystem 93
  - Punkt/Ebene 109
  - Punkt/Gerade 92
- Länge eines Vektors 79
- Laplace-Experiment 146
  - Berechnungen 149
- Laplace-Wahrscheinlichkeit 147
- lineare Abhängigkeit 112, 114
  - Normalenvektoren 117
  - Richtungsvektoren 112, 116
- lineare Abhängigkeit (Unabhängigkeit) 75, 86
- lineares Gleichungssystem 64ff.
  - Anzahl der Lösungen 70f.
- Linearkombination 75
- linksgekrümmt 44
- Logarithmusfunktion 29f.
- lokaler Hochpunkt (Tiefpunkt) 43
- Lotfußpunkt 99, 130
  
- M**atrix 65, 136f.
- Matrizenrechnung 136f.
- Maximum 43
- mehrstufiges Zufallsexperiment 141, 147f.
- Mengendiagramm (Venn) 144
- Mittelpunkt 83
- mittlere quadratische Abweichung 155
  
- Moivre-Laplace-Näherungsformel 162
- Monotonie 10, 40
- Monotonieregel 20
- Multiplikationssatz 152
  
- n**achdifferenzieren 38
- Näherungsformel von de Moivre-Laplace 162
- Neigungswinkel 33
- Normale 41
- Normaleneinheitsvektor 91, 104
- Normalenform 91
  - Ebene 104, 113
- Normalenvektor 101
  - Ermittlung 87
  - Lagebeziehung Gerade/Ebene 111
  - Normierung 106
- Normalverteilung 161
- normierte Zufallsgröße 156
- n-stufiges Zufallsexperiment 142
- Nullfolge 47
- Nullstelle 22
- Nullstellensatz 8ff.
- Nullvektor 73, 77
  
- O**bersumme 46
- Orthogonalität 82
  - Gerade/Ebene 112f.
  - Gerade/Gerade 96
  - Vektoren 87
  - Untersuchung 113, 117
- orthonormiert 82
- Ortsvektor 78, 90
  
- P**arabel n-ter Ordnung 15
- Parallelität
  - Gerade/Ebene 110f.
  - Gerade/Gerade 94f.
- parallelgleich 73
- Parameterform 90
  - der Ebenengleichung 101, 112
- Partialbruchzerlegung 57

- partielle Integration 56
- Passante 134
- Pfad 141
- Pfadregeln 148 f.
- Polarkoordinaten 133
- Polstelle 24 f.
- Polynom 21
- Polynomdivision 23, 27, 57
- Polynomfunktion 21 ff.
- Potenzfunktion 15 ff.
- Produktregel 37
  - Umkehrung 56
- Punkt-Richtungs-Form 90, 101
- Punktsymmetrie 21
  
- q**uadratische Ergänzung 10
- quadratische Funktionen 8 ff.
- Quotientenregel 38
  
- r**ationale Funktion 24 ff., 57
- Rauminhalt (Raummaßzahl) 62, 89
- Rechengesetze, Verknüpfung von Ereignissen 144
- Rechenregeln, Wahrscheinlichkeiten 147
- rechtsgekrümmt 44
- Regel von Sarrus 66
- relative Häufigkeit 145, 151
- Repräsentant 73
- Richtungsvektor 90, 101
  - linear abhängig/unabhängig 110
- Rotationskörper 62
- Roulette 145
  
- S**arrus-Regel 66
- Satz von Bayes 152
- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit 152
- Scheitel 9 f.
- Scheitelform 10
- Scherung 138
- Schnitt
  - Gerade/Ebene 119
  - Gerade/Gerade 97
- Schnittgerade 114 f., 121 f.
- Schnittpunkt
  - Gerade/Ebene 112 f.
  - Gerade/Gerade 97
- Schnittpunktbestimmung 97, 119
- Schnittwinkel 98
  - Ebene/Ebene 127
  - Gerade/Ebene 126
  - Graphen 41
- Schwerpunkt 83
- Sekante 33, 134
- senkrechte Geraden 96
- senkrechte Projektion 89
- sicheres Ereignis 143
- Signumfunktion 106 f.
- Sinusfunktion 30 f.
- Sinuskurve 30
- Skalarprodukt 80
- S-Multiplikation 74, 77
- Spaltenvektor 136
- Spatmittelpunkt 83
- Spiegelpunkt 130
- Spiegelung 13, 130, 138
- Spurgerade 123, 125
- Spurpunkt 124
- Stammfunktion 35, 50
- Standardabweichung 155
- Steigung 34
- stetig hebbare Definitionslücke 24, 26
- Stetigkeit 34
- Streckung 138
- streng monoton (ab-) zunehmend 10, 40
- streng monoton fallend (steigend) 40
- Substitutionsregel 53, 55
- Summengrenzwertformel 47
- Summenregel 37
- Symmetrie 21
- System 139 f.

- T**angensfunktion 31 f.  
Tangenskurve 31  
Tangente 41, 134  
Tangentialebene 135  
Teilverhältnis 84  
Terrassenpunkt 45  
totale Wahrscheinlichkeit 152  
Trefferwahrscheinlichkeit 156  
trigonometrische Funktion 30 f.  
Tschebyschew-Ungleichungen 160  
Tupel 142
- Ü**bergangsmatrix 139  
Umkehrfunktion 17 f., 30, 38  
– der quadratischen Funktion 10 f.  
unabhängige Ereignisse 153  
unabhängige Zufallsgrößen 155  
unbestimmtes Integral 51 f.  
uneigentlicher Grenzwert 28 f.  
Unendlichkeitsstelle 24  
ungerade Funktion 15 f.  
Ungleichungen von Tschebyschew 160  
unmögliches Ereignis 143  
Untersumme 46  
unvereinbare Ereignisse 145, 153  
Urnenmodell 142, 150, 158  
Ursprungsebene 107  
Ursprungsgerade 93
- V**arianz 155  
Vektoren 73  
– Addition 74, 77  
– Betrag 79  
– Geradendarstellung 90  
– Komponentendarstellung 76  
– lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit 86, 94  
– orthogonale 87  
– S-Multiplikation 77  
– Subtraktion 77  
– Winkel 81  
– Koordinatendarstellung 76
- Vektorkette 74  
Vektorpfeil 73  
Vektorprodukt 82 f.  
Vektorraum 75  
Verbindungsvektor zweier Punkte 79  
vereinbare Ereignisse 145, 153  
Verfeinerung 141  
Verkettung 38  
Verknüpfung von Ereignissen 144  
Verschiebungsvektor 138  
Versuch 141  
Verteilungsfunktion 154
- W**ahrscheinlichkeit 141  
– bedingte 151 f.  
– bei Laplace-Experimenten 146  
– Rechenregeln 147  
Wahrscheinlichkeitsfunktion 154  
Wahrscheinlichkeitsraum 146  
Wahrscheinlichkeitsverteilung 146, 154, 156 f.  
Wendepunkt 45  
Wendestelle 45  
Wendetangente 45  
windschiefe Geraden 94, 96  
– Abstand 99  
Winkel zwischen Vektoren 81  
Wurzelfunktion 10 f., 17
- Z**eilenvektor 136  
zentraler Grenzwertsatz 163  
Zerlegung des Ereignisraums 145  
Ziehen  
– mit Zurücklegen 142, 151  
– ohne Zurücklegen 142, 150  
Zufallsexperiment 141  
Zufallsgröße 154  
Zufallsvariable 154  
Zustandsvektor 139  
Zwei-Punkte-Form 90  
zweireihige Determinante 66

# DUDEN

## Dein Booster zum erfolgreichen Abitur!

- › Effektive Prüfungsvorbereitung in kurzer Zeit
- › Der wesentliche Abiturstoff in klarer, übersichtlicher Form
- › Komplexe Themen verständlich und präzise erklärt

DAS ORIGINAL  
Über  
1 Mio. verkaufte  
Bücher  
SEIT 2000

ISBN 978-3-411-77122-6  
13 € (D) · 13,40 € (A)



9

[www.duden.de](http://www.duden.de)