DUDEN

ABI GENIAL

Mathematik

Für schnellen Lernerfolg

DAS SCHNELL-MERK-SYSTEM

Duden

ABI GENIAL

Mathematik

DAS SCHNELL-
MERK-SYSTEM

Dudenverlag
Berlin

Inhaltsverzeichnis

Abi genial ermöglicht Ihnen eine sehr effektive Prüfungsvorbereitung. Im Mittelpunkt steht die übersichtliche Darstellung von allen abiturrelevanten inhaltlichen Schwerpunkten.

Der Prüfungsstoff
Die Mindmap des Prüfungsstoffes bietet Ihnen eine schnelle Übersicht über alle im Buch dargestellten Inhalte. Nutzen Sie diese, um sich einen Überblick über den Prüfungsstoff zu verschaffen und zu markieren, was Sie noch üben müssen.

Das Wichtigste in Kürze
Die Überblicke zu den jeweiligen Kapiteln bieten eine Übersicht über die zentralen Inhalte und die wesentlichen Kompetenzerwartungen im Abitur. Dabei sind die zuerst genannten Kompetenzen relevant für alle Schülerinnen und Schüler. Sie bilden die Basis des Abiturwissens. Die weiteren Kompetenzen richten sich an Schülerinnen und Schüler, die sich vertiefend mit dem Inhaltsfeld auseinandersetzen möchten, z. B. weil sie einen Leistungskurs besuchen.

Kapitelstarter
Zu Beginn eines jeden Kapitels vermittelt eine Übersicht die wichtigsten Definitionen zu dem Thema.

Kapitel
Im Kapitel wird das Basiswissen mit allen relevanten Inhalten zum Thema dargestellt. Die klare Gliederung des Stoffes ermöglicht Ihnen ein schnelles Auffinden und eine gute Orientierung durch Merkwissen (►) und Infokästen.
Die zahlreichen Beispiele innerhalb der Kapitel zeigen Ihnen, wie Sie konkret vorgehen können.

Topthema
Im Topthema wird der zentrale Lernstoff noch einmal vertieft.

Prüfungsratgeber und Prüfungsaufgaben
Der Prüfungsratgeber ist ein Extrakapitel, in dem Sie Tipps für einen Selbsttest und zum Schreiben der Abiturklausur erhalten. Hier finden Sie alles Wichtige über die Anforderungsbereiche und Operatoren sowie typische Prüfungsaufgaben zu allen Unterrichtsthemen. Nutzen Sie die erlernten Kompetenzen, um die Aufgaben zu lösen.
Neben den inhaltsbezogenen Kompetenzen spielen im Abitur auch prozessbezogene Kompetenzen, wie die Nutzung von Werkzeugen, z. B. grafikfähige Taschenrechner oder Computeralgebrasysteme, eine wichtige Rolle. Auch diese kommen in den thematischen Prüfungsaufgaben zum Tragen.

Prüfungstraining mit Abitur-Originalklausuren
Ergänzt wird das Prüfungstraining durch Originalprüfungen mit ausführlichen Musterlösungen, die Sie unter **www.duden.de/abitur** finden.

! Bitte beachten Sie: Die Anforderungen sind in den Bundesländern sehr unterschiedlich. Auch in den Grund- und Leistungskursen gibt es große Unterschiede in den Kompetenzerwartungen.
Gleichen Sie daher die Angaben in der Mindmap und in den Überblicken (Das Wichtigste in Kürze) mit den Abiturvorgaben in Ihrem Bundesland ab.

Der Prüfungsstoff

Beschreibende und beurteilende Statistik

Beurteilende Statistik
- Stichproben ↑ S. 193
- Hypothesen ↑ S. 194
- Alternativtests ↑ S. 195
- Signifikanztests ↑ S. 197

Beschreibende Statistik
- Diagramme ↑ S. 190
- Mittelwert, Median, Modalwert ↑ S. 191
- Varianz, Standardabweichung ↑ S. 192

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Binomialverteilung ↑ S. 178
- Zufallsgrößen ↑ S. 173
- bedingte Wahrscheinlichkeit ↑ S. 171
- Urnenmodelle ↑ S. 170
- Wahrscheinlichkeit ↑ S. 163

Analytische Geometrie

- Kreis und Kugel ↑ S. 152 ff.
- Schnittwinkel und Abstände ↑ S. 146 ff.

Lagebeziehungen
- Gerade – Ebene ↑ S. 133 ff.
- Ebene – Ebene ↑ S. 138 ff.
- Ebenen in spezieller Lage ↑ S. 144 ff.
- Geraden- und Ebenengleichungen ↑ S. 142 f.

Vektoren und Vektorräume

- Skalarprodukt ↑ S. 114
- Vektorprodukt ↑ S. 116
- Spatprodukt ↑ S. 118
- Vektorräume ↑ S. 119
- Rechnen mit Vektoren ↑ S. 105

Integralrechnung

- Rotationskörper ↑ S. 102
- uneigentliche Integrale ↑ S. 101
- bestimmtes Integral ↑ S. 92
- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ↑ S. 95
- Integrationsregeln ↑ S. 91
- Integrationsmethoden ↑ S. 96

Was kann drankommen?

Funktionen

- Zahlenfolgen ↑ S. 45
- Funktionsklassen ↑ S. 30
- Darstellung und Eigenschaften von Funktionen ↑ S. 20, 22

Gleichungen und Gleichungssysteme

- Exponential- und Logarithmusgleichungen ↑ S. 53
- goniometrische Gleichungen ↑ S. 51
- Wurzelgleichungen ↑ S. 51
- Gleichungssysteme: Lösungsverfahren ↑ S. 54
- quadratische Gleichungen ↑ S. 50

Differenzialrechnung

- Funktionen untersuchen: Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung ↑ S. 62 ff.
- Differenziationsregeln ↑ S. 69 ff.
- Extremwertprobleme ↑ S. 88 f.
- Kurvendiskussion ↑ S. 83
- Funktionen bestimmen ↑ S. 84 ff.

Matrizen

- Diagonalmatrix ↑ S. 123
- Dreiecksmatrix ↑ S. 123
- transponierte Matrix ↑ S. 124
- inverse Matrix ↑ S. 127
- Rechnen mit Matrizen ↑ S. 124
- Übergangsmatrizen ↑ S. 128

Funktionen

Grundlagen

- Definitionen von Eigenschaften wie Symmetrie und Periodizität
- Definition der Nullstellen
- Grundlegende Eigenschaften von Funktionen verschiedener Klassen, insbesondere von ganzrationalen Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen und Sinusfunktionen
- Anwendung von Transformationen auf Funktionen (↑S. 28 f. Topthema: Funktionsscharen)

Was ist darüber hinaus wichtig?

- Definitionen weiterer Eigenschaften wie Monotonie und Beschränktheit
- Vorgehensweise bei der Verknüpfung und Verkettung von Funktionen
- Grundlegende Eigenschaften weiterer Funktionen, z. B. von Wurzelfunktionen, gebrochenrationalen Funktionen, Kosinus- und Tangensfunktionen sowie Logarithmusfunktionen
- Definitionen von Zahlenfolgen

Gleichungen und Gleichungssysteme

Grundlagen

- Lösung quadratischer Gleichungen ohne digitale Hilfsmittel, z. B. durch Nutzung der p-q-Formel
- Lösung biquadratischer Gleichungen ohne digitale Hilfsmittel, z. B. durch Substitution
- Kenntnis von Lösungsmethoden für Exponentialgleichungen
- Kenntnis und Nutzung des Gauß-Algorithmus zur Lösung von linearen Gleichungssystemen (↑S. 56 ff. Topthema: Gaußsches Eliminierungsverfahren)
- Interpretation der Lösungen des Gauß-Algorithmus im Hinblick auf die Lösbarkeit des Gleichungssystems und die Anzahl der Lösungen (↑S. 56 ff. Topthema: Gaußsches Eliminierungsverfahren)

Was ist darüber hinaus wichtig?

- Lösung von Wurzelgleichungen und goniometrischen Gleichungen
- Kenntnis von Lösungsmethoden für Logarithmengleichungen
- Darstellung linearer Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise

1 Funktionen

Wichtige Definitionen

Abbildungen

Eine **Abbildung** ordnet den Elementen einer Menge D durch eine Vorschrift Elemente einer Menge W zu. Eine solche Abbildung (Zuordnung) nennt man

- **mehrdeutig**, wenn mindestens einem $x \in D$ **mehr als ein** $y \in W$ zugeordnet wird,
- **eindeutig**, wenn jedem $x \in D$ **genau ein** $y \in W$ zugeordnet wird,
- **eineindeutig**, wenn außerdem noch zu jedem $y \in W$ **genau ein** $x \in D$ gehört.

Mehrdeutige Abbildung f_1:
Jeder ganzen Zahl wird die Zahl zugeordnet, für die sie Teiler ist, also $1 \to 1$; $1 \to 2$; $2 \to 2$; ...
Eindeutige Abbildung f_2:
Jeder ganzen Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet, also $0 \to 0$; $\pm 1 \to 1$; $\pm 2 \to 4$; $\pm 3 \to 9$; ....
Eineindeutige Abbildung f_3:
Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet, also $0 \to 0$; $1 \to 2$; $0{,}5 \to 1$; $\pi \to 2\pi$ usw. Zu jeder reellen Zahl gehört auch *genau eine* reelle Zahl, die halb so groß ist.

Produktmengen

Eine Abbildung ist beschreibbar als Teilmenge der Produktmenge $D \times W$.
Die **Produktmenge** $D \times W$ ist die Menge aller geordneten Paare, deren erste Komponente ein Element aus D und deren zweite Komponente ein Element aus W ist.

$D = \mathbb{Z}$; $W = \mathbb{N}$
$D \times W = \{(0; 0), (0; 1), ..., (-1; 0), (-1; 1), (-1; 2), ..., (1; 0), (1; 1), (1; 2), ..., (-2; 0), (-2; 1), (-2; 2), ...\}$.
Abbildung f_2 von oben ist eine Teilmenge von $D \times W$.
$f_2 = \{(0; 0), (-1; 1), (1; 1), (-2; 4\}, (2; 4), ...\}$

Funktionen

Eine **Funktion** f ist eine eindeutige Zuordnung (Abbildung) der Elemente zweier Mengen. Jedem Element x aus der Definitionsmenge D_f (dem **Definitionsbereich**) wird dabei genau ein Element y aus einer Wertemenge W_f (dem **Wertebereich**) zugeordnet.
Kurzform:
$f: x \mapsto y$ oder $f: x \mapsto f(x)$
Die Elemente $x \in D_f$ heißen **Argumente** von f, die zugeordneten Elemente $y \in W_f$ bzw. $f(x) \in W_f$ heißen **Funktionswerte**.
Die Gleichung $y = f(x)$ heißt Funktionsgleichung der Funktion f.

Messung der Lufttemperatur T zu bestimmten Uhrzeiten

Uhrzeit	4	6	8	20	22	24
T in °C	–3	–2	0	0	–1	–2

Hier gilt:
$D_f = \{4; 6; 8; 20; 22; 24\}$ $W_f = \mathbb{Z}$
(bei ganzzahliger Messung)
$f = \{(4; -3), (6; -2), (8; 0), (20;0), (22;-1), (24; -2)\}$

Jeder reellen Zahl wird ihre dritte Potenz zugeordnet.
Hier gilt:
$D_f = \mathbb{R};\ W_f = \mathbb{R}$
$f = \{(x; y) \mid y = x^3 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$,
also $f = \{(0; 0), (-2; -8), (0{,}5; 0{,}125), \ldots\}$, $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Reelle Funktionen

Sind Definitions- und Wertebereich Mengen reeller Zahlen, so spricht man von **reellen Funktionen**.
Eine Funktion kann auch zwei oder mehr unabhängige Variablen besitzen.
Bei zwei unabhängigen Variablen besteht der Definitionsbereich aus geordneten Paaren reeller Zahlen und der Wertebereich ist $\mathbb{R}$ oder eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Man schreibt dann z.B. $z = f(x, y)$.

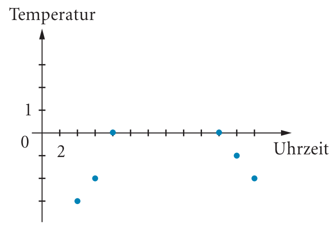
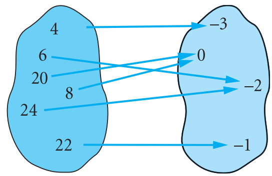
Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b (jeweils auf Maßzahlen bezogen) gilt:
$A(a, b) = a \cdot b$.
Der Definitionsbereich von A ist die Menge $\{(a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$, der Wertebereich ist $\mathbb{R}^+$. Jedem Paar von Seitenlängen wird eindeutig ein Flächeninhalt zugeordnet.

1.1 Darstellung und Beschreibung

Für die Darstellung und Beschreibung reeller Funktionen kommen vor allem folgende Varianten in Frage:

- Angabe der (geordneten) **Paare** einander zugeordneter Elemente aus Definitions- und Wertebereich (nur möglich bei endlicher Paaranzahl);
- Beschreibung der Zuordnungsvorschrift in Worten (**Wortvorschrift**; verbale Beschreibung);
- Angabe einer die Zuordnung vermittelnden **Funktionsgleichung** $y = f(x)$ ($f(x)$ heißt dann **Funktionsterm**);
- Darstellung der einander zugeordneten Elemente in einer **Wertetabelle** (bei endlicher Paarzahl);
- Beschreibung durch **grafische Darstellungen**, z. B. durch ein Pfeildiagramm oder durch Deuten der Zahlenpaare als die Koordinaten von Punkten in einem Koordinatensystem, wodurch man einen Graphen der Funktion erhält.

<table>
<tr><th colspan="2">Darstellung und Beschreibung von Funktionen</th></tr>
<tr><th>Variante</th><th>Beispiel Temperaturmessung</th></tr>
<tr><td>Paarangabe</td><td>(4; –3), (6; –2), (8; 0), (20; 0), (22; –1), (24; –2)</td></tr>
<tr><td>Wortvorschrift</td><td>Jedem Messzeitpunkt wird die gemessene Lufttemperatur zugeordnet</td></tr>
<tr><td>Funktionsgleichung</td><td>(Angabe ist in diesem Falle nicht möglich)</td></tr>
<tr><td>Wertetabelle</td><td><table><tr><th>Uhrzeit</th><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>20</td><td>22</td><td>24</td></tr><tr><th>T in °C</th><td>–3</td><td>–2</td><td>0</td><td>0</td><td>–1</td><td>–2</td></tr></table></td></tr>
</table>

Darstellung und Beschreibung von Funktionen (Forts.)	
grafische Darstellung	
Pfeildiagramm	

Parameterdarstellung

Bei der Parameterdarstellung von Funktionen wird sowohl die Variable x als auch die Variable y jeweils durch eine Gleichung beschrieben, die einen (gemeinsamen) Parameter t als unabhängige Variable enthält. Es gilt also: $x = f_1(t)$ und $y = f_2(t)$.

Beispiel: Es sei $x = f_1(t) = \frac{t}{3}$ und $y = f_2(t) = 6t$ mit $D_{f_1} = D_{f_2} =]-\infty; \infty[$ bzw. $-\infty < t < \infty$. Dann erhält man folgende Wertetabellen:

Wertetabelle für f_1 und f_2						
t	**–9**	**–6**	**–3**	**0**	**3**	**6**
$\mathbf{x = f_1(t) = \frac{t}{3}}$	–3	–2	–1	0	1	2
$\mathbf{y = f_2(t) = 6t}$	–54	–36	–18	0	18	36

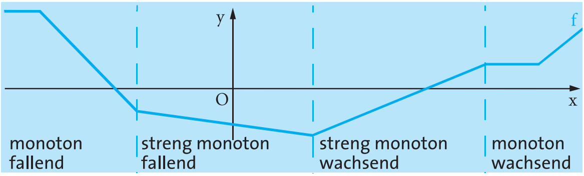
1.2 Eigenschaften

Monotonie

Definition

Eine Funktion f heißt in einem Intervall I von D_f

monoton fallend,	**monoton wachsend,**
wenn für beliebige $x_1, x_2 \in I$ gilt:	
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
Gilt sogar	
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
so heißt f	
streng monoton fallend.	**streng monoton wachsend.**



Beschränktheit

Definition

Eine Funktion f heißt

nach oben beschränkt,	**nach unten beschränkt,**
wenn es eine Zahl $s_o \in \mathbb{R}$ gibt,	wenn es eine Zahl $s_u \in \mathbb{R}$ gibt,
sodass für alle $x \in D_f$ gilt:	
$f(x) \leq s_o$	$f(x) \geq s_u$
Man nennt dann	
s_o **obere Schranke** von f.	s_u **untere Schranke** von f.

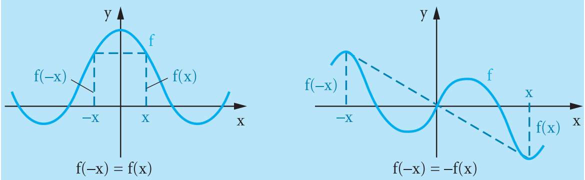
Symmetrie

Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion f heißt

gerade Funktion,	**ungerade Funktion,**
wenn mit der Zahl x stets auch –x zum Definitionsbereich D_f von f gehört und wenn gilt:	
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$

- Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.



Beispiele: $f_1(x) = x^2$ ist eine gerade Funktion, denn
$f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x)$.
$f_2(x) = x^3$ ist eine ungerade Funktion, denn
$f_2(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f_2(x)$.
$f_3(x) = x^2 - x$ ist weder gerade noch ungerade, denn
$f_3(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$, also verschieden von $f_3(x)$ und $-f_3(x)$.

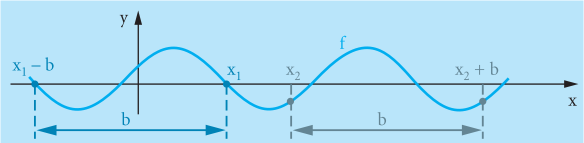
Periodizität

Definition

Eine Funktion f heißt **periodisch**, wenn es eine Zahl $b > 0$ gibt, sodass für jedes $x \in D_f$ gilt: $f(x + b) = f(x)$ $(x + b \in D_f)$. Die kleinste derartige Zahl b wird **Periode** von f genannt.

Für eine periodische Funktion f mit $f(x + b) = f(x)$ gilt also:

- Im Abstand b wiederholen sich die Funktionswerte.
- Die Abschnitte des Graphen von f über den Intervallen $[x; x + b]$, $[x + b; x + 2b]$, $[x - 3b; x - 2b]$, ... aus D_f sind kongruent.



Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen

Definition

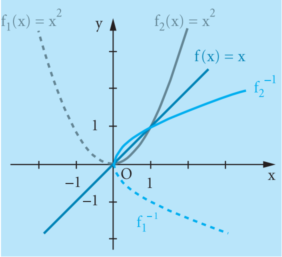
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt umkehrbar, wenn die durch sie vermittelte Zuordnung f **umkehrbar eindeutig** ist.

Zu jedem Element $y \in W_f$ gehört also auch genau ein $x \in D_f$. Das heißt: Für alle $x_i \in D_f$ folgt aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$. Die Umkehrfunktion von f (auch inverse Funktion genannt) wird mit f^{-1} bezeichnet. Es ist $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Die **Gleichung der Umkehrfunktion** von f gewinnt man, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst (so dies möglich ist) und die Bezeichnungen y und x vertauscht. Die Graphen einer Funktion $y = f(x)$ und ihrer Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.

Beispiel: Die Funktion g mit der Gleichung $y = 3x - 5$, $D_g = \mathbb{R}$ ist umkehrbar und hat die Gleichung g^{-1}: $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. Die Funktion $f(x) = x^2$ vermittelt hingegen keine eineindeutige Zuordnung: Jedem y-Wert (Ausnahme: 0) sind zwei x-Werte zugeordnet. Zerlegt man jedoch f in die beiden Funktionen f_1: $y = x^2$, $D_{f_1} = \,]-\infty; 0]$, und f_2: $y = x^2$, $D_{f_2} = [0; \infty[$,

dann existieren deren Umkehrungen. Aus $y = x^2$ folgt $|x| = \sqrt{y}$, woraus man $-x = \sqrt{y}$ bzw. $x = \sqrt{y}$ erhält. Vertauschen von x und y liefert die Gleichungen der Umkehrfunktionen
f_1^{-1}: $y = -\sqrt{x}$, f_2^{-1}: $y = \sqrt{x}$.



Nullstellen

Definition

Eine Zahl $x_0 \in D_f$ heißt **Nullstelle von** f, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

In der grafischen Darstellung ist eine Nullstelle einer Funktion die Abszisse eines Schnittpunkts des Funktionsgraphen mit der x-Achse. Eine Funktion kann genau eine, mehrere oder keine Nullstelle bzw. Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen.

Abschnittsweise definierte Funktionen

Definition

Abschnittsweise definierte Funktionen werden in den Abschnitten ihres Definitionsbereiches durch unterschiedliche Zuordnungsvorschriften bzw. Funktionsterme definiert.

Beispiel: Die Zuordnung „Briefgewicht (m in g) → Beförderungsgebühr (p in Euro)" stellt eine Funktion p = f(m) dar:

$$p(m) = \begin{cases} 0{,}55 \text{ für } 0 < m \leq 20 \\ 0{,}90 \text{ für } 20 < m \leq 50 \\ 1{,}45 \text{ für } 50 < m \leq 500 \\ 2{,}20 \text{ für } 500 < m \leq 1\,000 \end{cases}$$

1.3 Verknüpfen und Verketten

Verknüpfen

Aus bekannten Funktionen können durch **Verknüpfen** der entsprechenden Funktionsgleichungen (kurz: der Funktionen) mithilfe der Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division neue Funktionen gebildet werden.

Summe, Differenz, Produkt, Quotient

Die Funktionen f mit $y = f(x)$ und g mit $y = g(x)$ auf den Definitionsmengen D_f und D_g bilden folgende Verknüpfungen:

Summe	$s = f + g$ mit $s(x) = f(x) + g(x)$, $D_s = D_f \cap D_g$
Differenz	$d = f - g$ mit $d(x) = f(x) - g(x)$, $D_d = D_f \cap D_g$
Produkt	$p = f \cdot g$ mit $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $D_p = D_f \cap D_g$
Quotient	$q = \frac{f}{g}$ mit $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_q = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$

Der Definitionsbereich einer durch Verknüpfung entstandenen Funktion ist in Abhängigkeit von den Definitionsbereichen der Ausgangsfunktion und der Verknüpfungsart zu bestimmen.

Beispiel: Für die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - 1$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$ wird das Produkt $f \cdot g$ beschrieben durch $p(x) = x^2 \cdot (x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Für den Quotienten $\frac{f}{g}$ erhält man $q(x) = \frac{x^2}{x - 1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

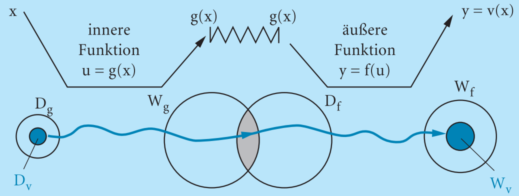
Verketten

Eine weitere Möglichkeit, aus gegebenen Funktionen neue Funktionen zu bilden, stellt das **Nacheinanderausführen** bzw. **Verketten** zweier Zuordnungsvorschriften dar.

Verkettung, äußere und innere Funktion

Die Funktion v mit $v(x) = f(g(x))$ heißt **Verkettung** von f und g. Man schreibt $v = f \circ g$ (gesprochen: *f* nach *g*). Die Funktion f nennt man **äußere Funktion**, die Funktion g **innere Funktion** der verketteten Funktion v. Die Verkettung v ist definiert für alle x, für welche die Funktionswerte von g (also $g(x)$) zum Definitionsbereich von f gehören.

Eine Verkettung der äußeren Funktion f mit der inneren Funktion g zur Funktion $v = f \circ g$ bedeutet demnach, dass man Funktionswerte $g(x)$ der inneren Funktion g zu Argumenten der äußeren Funktion f macht. Eine Verkettung ist nur dann möglich, wenn die Schnittmenge aus dem Definitionsbereich von f und dem Wertebereich von g nicht leer ist.



$$D_v = \{x \mid x \in D_g \text{ und } g(x) \in D_f\}$$

Beispiel: Betrachtet werden die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = 2x$. Um die Verknüpfung $f \circ g$ zu erhalten, wendet man in einem ersten Schritt auf einen Wert x aus dem Definitionsbereich von g die Zuordnungsvorschrift g „Verdopple!“ an und erhält so den Funktionswert $g(x) = 2x$.

In einem zweiten Schritt wird auf den Wert $g(x)$ die Zuordnungsvorschrift f „Sinuswert bilden!“ angewendet. Man erhält: $f(2x) = \sin 2x$.

Durch die Verknüpfung $f \circ g$ ist somit die neue Funktion v mit $v(x) = \sin 2x$ entstanden.

Werden reelle Zahlen additiv oder multiplikativ mit Funktionstermen $f(x)$ oder mit der Funktionsvariablen x verknüpft, so erhält man die Gleichungen neuer Funktionen.
Diese Gleichungen beschreiben jeweils eine Menge von Funktionen, eine **Funktionenschar**. Die Gleichungen der einzelnen Funktionen (der **Scharelemente**) hängen von der Wahl der **Scharparameter** c, d, k bzw. m ab. Das Bild einer Funktionenschar ist eine **Graphenschar**.

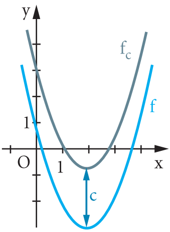
Gleichungen der Funktionsscharen

Aus einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ entstehen so z. B. die Gleichungen $(c, d, k, m \in \mathbb{R})$

1. $y = f_c(x) = f(x) + c,$
2. $y = f_d(x) = f(x + d),$
3. $y = f_k(x) = k \cdot f(x),$
4. $y = f_m(x) = f(m \cdot x).$

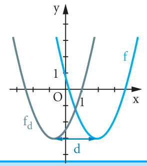
Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_c(x) = f(x) + c$

1. Die Graphen der Schar f_c erhält man durch **Verschiebung** des Graphen von f **in Richtung der y-Achse** um $|c|$ Einheiten, und zwar für $c > 0$ in Richtung des positiven und für $c < 0$ in Richtung des negativen Teils der y-Achse.



Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_d(x) = f(x + d)$

2 Die Graphen der Schar f_d erhält man durch **Verschiebung** des Graphen von f **in Richtung der x-Achse** um $|d|$ Einheiten, und zwar für $d > 0$ in Richtung des negativen und für $d < 0$ in Richtung des positiven Teils der x-Achse.



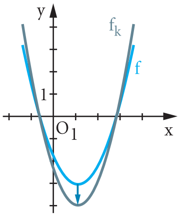
Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_k(x) = k \cdot f(x)$

Die Graphen der Schar f_k erhält man durch **Streckung** oder **Stauchung** des Graphen von f senkrecht zur x-Achse mit dem Faktor $|k|$.

$k > 1$: Streckung, $0 < k < 1$: Stauchung

3 Für $k = -1$ geht der Graph von f_k aus dem Graphen von f durch **Spiegelung** an der x-Achse hervor.

$-1 < k < 0$ oder $k < -1$: Spiegelung an der x-Achse und anschließend Stauchung bzw. Streckung senkrecht zur x-Achse.



Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_m(x) = f(m \cdot x)$

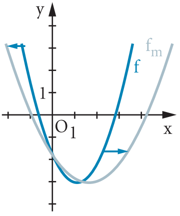
Die Graphen der Schar f_m erhält man durch **Streckung** oder **Stauchung** des Graphen von f senkrecht zur y-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{|m|}$

$m > 1$: Streckung

$0 < m < 1$: Stauchung

4 Für $m = -1$ geht der Graph von f_m aus dem Graphen von f durch **Spiegelung** an der y-Achse hervor.

$-1 < m < 0$ oder $m < -1$: Spiegelung an der y-Achse und anschließend Streckung bzw. Stauchung senkrecht zur y-Achse.



1 Tipps für einen Selbsttest

Überprüfen Sie Ihr Wissen und Ihre Kompetenzen mit diesen Tipps selbst. So finden Sie heraus, welche Themenbereiche Sie vertiefen und was Sie noch üben sollten.

- Geben Sie einen Überblick über das Thema.
- Nennen und erklären Sie die wichtigsten Fachbegriffe.
- Sie beherrschen den Umgang mit der Formelsammlung und wissen, wo die Inhalte und Formeln zu finden sind.
- Sie beherrschen alle Rechenfertigkeiten.
- Sie kennen die notwendigen Eingaberoutinen am Taschenrechner.
- Stellen Sie sich Ihr Vorgehen bildlich vor.
- Nutzen Sie Ihre Kenntnisse und Fertigkeiten auch in unbekannten Situationen, um Probleme zu lösen.
- Vernetzen Sie das Thema mit anderen Themenfeldern.
- Machen Sie sich Strategien bewusst, die Ihnen helfen können, wenn Sie unsicher sind, z. B. das Zurückführen auf Bekanntes oder die Rückführung auf einfachere Zahlen.
- Zerlegen Sie Probleme in Teilprobleme.

2 Die Klausur

2.1 Tipps für das Schreiben einer guten Klausur

Erst denken – dann schreiben

- Verschaffen Sie sich zuerst einen Überblick – lesen Sie alle Aufgaben aufmerksam durch.
- Notieren Sie erste Gedanken, die Ihnen zu den Inhalten einfallen.
- Lesen Sie die Aufgaben ein zweites Mal. Markieren Sie die Aufgabenteile, bei denen Sie sich sicher fühlen.
- Beginnen Sie nun mit den markierten Aufgaben.
- Achten Sie auf die verwendeten Operatoren (↑S. 204 ff.)

So schreiben Sie besser

- Die Aufgabenteile können in der Regel unabhängig voneinander bearbeitet werden. Können Sie einen Aufgabenteil nicht lösen, so ist es dennoch möglich, die folgenden Aufgabenteile zu berechnen.
- Versuchen Sie zu allen Aufgabenteilen zumindest einen Ansatz oder eine Idee zu entwickeln und schreiben Sie diese auf.
- Überprüfen Sie, ob berechnete Werte im Sachzusammenhang sinnvoll sind. Führen Sie die Rechnung im Zweifel erneut durch. Oft sind Eingabefehler der Grund für falsche Ergebnisse.
- Verwenden Sie bei Beschreibungen und Begründungen Fachbegriffe. Achten Sie darauf, sie richtig zu verwenden.
- Denken Sie an Einheiten und Antwortsätze.
- Achten Sie auf Rechtschreibung und Zeichensetzung.
- Lesen Sie Korrektur.

2.2 Inhalt und Aufbau einer Klausur

Im Fach Mathematik bezieht sich die schriftliche Abiturklausur auf rechnerische Lösungsverfahren, Anwendungsaufgaben, grafische Darstellungen und Datenvorgaben, wobei untersucht, modelliert, berechnet und interpretiert werden muss. Die Aufgaben lassen sich den folgenden drei Bereichen zuordnen:
- Analysis,
- Lineare Algebra / Analytische Geometrie,
- Stochastik.

Die Prüfungsaufgaben
- greifen unterschiedliche Themen aus den obligatorischen inhaltlichen Vorgaben auf, wobei sich diese Vorgaben je nach Bundesland unterscheiden können;
- unterscheiden sich grundsätzlich danach, ob sie mithilfe eines wissenschaftlichen (grafikfähigen) Taschenrechners gelöst werden oder ob ein im Unterricht eingeführtes Computeralgebrasystem (CAS) eingesetzt wird;
- sind problemorientiert und häufig offen formuliert, sodass allgemeine Lösungsstrategien zu allen drei Themenbereichen beherrscht werden müssen;
- können auffordern, nicht nur innermathematische, sondern auch außermathematische Bezüge herzustellen;
- verlangen nicht nur eine rechnerische Darstellung und Lösung, sondern ebenso angemessen sprachlich formulierte Kommentierungen und Interpretationen von Lösungsschritten oder Ergebnissen, die als Darstellungsleistung berücksichtigt werden. Gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit können zu einer Absenkung der Bewertung führen.

Die Aufgabenstellung einer Klausur setzt sich aus mehreren Teilaufgaben zusammen, die unterschiedliche Schwierigkeitsgrade aufweisen und **drei Anforderungsbereichen (AFB)** zugeordnet werden können, die aufeinander aufbauen. Sie unterscheiden sich hinsichtlich der erzielbaren Punkte.

Anforderungs-bereich	Bedeutung	Anteil an Bewertung
AFB I: Reproduktion	Daten, Fakten, Regeln, Formeln, Aussagen wiedergeben: geübte Arbeitstechniken und Verfahren beschreiben und verwenden	20–30 %
AFB II: Reorganisation und Transfer	Sachverhalte und vorgegebene Aspekte auswählen, anordnen, verarbeiten, darstellen; selbstständiges Übertragen der Sachverhalte auf vergleichbare neue Zusammenhänge	40–60 %
AFB III: Reflexion und Problemlösung	Planmäßiges Verarbeiten komplexer Gegebenheiten mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Wertungen zu gelangen	20–30 %

2.3 Die Operatoren

Zur Formulierung der Aufgabenstellungen werden bestimmte **Arbeitsanweisungen,** sog. Operatoren, verwendet. Sie liefern wichtige Hinweise auf die Tätigkeiten, die beim Bearbeiten der Aufgabe von Ihnen erwartet werden. Mit den Operatoren sind unterschiedliche Schwierigkeitsgrade verknüpft. Viele Operatoren lassen sich einem der drei Anforderungsbereiche zuordnen. Andere können nicht eindeutig auf einen Anforderungsbereich bezogen werden, sondern stellen eine Mischform dar. Man sollte daher auf den genauen Wortlaut der Operatoren achten.

Anforderungsbereich I: Reproduktion

Operatoren	Bedeutung
Nennen Sie … *Geben Sie an …*	Sachverhalte, Begriffe und Daten ohne genauere Begründungen, Lösungsansätze und -wege aufführen
Berechnen Sie …	Ausgehend von einem Ansatz Ergebnisse durch Rechenoperationen erzielen
Beschreiben Sie …	Strukturen, Sachverhalte oder Methoden in eigenen Worten und angemessener Fachsprache in übersichtlicher Darstellung beschreiben
Erstellen Sie … *Stellen Sie dar …*	Sachverhalte, Beziehungen, Vorgehensweisen, Methoden in fachlich sachgerechter Form darstellen
Skizzieren Sie …	Wesentliche Merkmale oder Eigenschaften von Sachverhalten oder Objekten grafisch darstellen; auch Freihandskizzen sind hier möglich
Zeichnen Sie … *Stellen Sie grafisch dar …*	Hinreichend genaue grafische Abbildung von Objekten oder Daten erstellen

Anforderungsbereich II: Reorganisation und Transfer

Operatoren	Bedeutung
Begründen Sie …	Sachverhalte auf Gesetzmäßigkeiten auf der Grundlage von mathematischen Regeln oder kausalen Beziehungen zurückführen
Beschreiben Sie …	Strukturen, komplexere Sachverhalte oder Methoden in angemessener Fachsprache wiedergeben

Operatoren	Bedeutung
Bestimmen Sie ... *Ermitteln Sie ...*	Lösungswege und Zusammenhänge finden und anwenden, um Ergebnisse anzugeben
Erklären Sie ... *Erläutern Sie ...*	Sachverhalte mithilfe eigenen Wissens und eigener Kenntnisse verständlich und nachvollziehbar in Zusammenhänge einordnen
Leiten Sie her ...	Entstehung oder Ableitung angegebener Sachverhalte oder Gleichungen aus anderen Zusammenhängen darstellen
Interpretieren Sie ...	Zusammenhänge oder Ergebnisse begründet auf gegebene Fragestellungen beziehen
Untersuchen Sie ... *Überprüfen Sie ...*	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten fachlich üblichen oder sinnvollen Kriterien bearbeiten
Vergleichen Sie ...	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten, Unterschiede ermitteln
Zeichnen Sie ... *Stellen Sie grafisch dar ...*	Hinreichend exakte grafische Darstellungen von komplexeren Objekten oder Daten erstellen
Zeigen Sie ... *Weisen Sie nach ...*	Aussagen, Sachverhalte, Fragestellungen mithilfe von Berechnungen, Herleitungen, gültigen Schlussfolgerungen oder logischen Begründungen bestätigen

Anforderungsbereich III: Reflexion und Problemlösung

Operatoren	Bedeutung
Begründen Sie ...	Mithilfe von Regeln und mathematischen Beziehungen komplexere Sachverhalte auf Gesetzmäßigkeiten zurückführen
Bestimmen Sie ... *Ermitteln Sie ...*	Komplexere Lösungswege und Zusammenhänge finden und anwenden, um Ergebnisse angeben zu können
Beurteilen Sie ...	Zu Sachverhalten ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen
Beweisen Sie ... *Widerlegen Sie ...*	Mathematische Sätze, Äquivalenzumformungen und logische Schlussfolgerungen verwenden, um Aussagen zu bestätigen oder gegebenenfalls durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen
Interpretieren Sie ...	Komplexere Beziehungen, Zusammenhänge, Ergebnisse begründet auf eine gegebene Fragestellung beziehen und deuten
Vergleichen Sie ...	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten, Unterschiede in komplexeren Zusammenhängen ermitteln
Zeigen Sie ...	Umfangreichere Aussagen oder komplexere Sachverhalte unter Nutzung von gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen

3 Thematische Prüfungsaufgaben

Im folgenden Kapitel sind zu den verschiedenen Unterrichtsthemen unterschiedlich schwierige Prüfungsaufgaben (↑S. 202 f.) zusammengestellt. Sie dienen der gezielten Vorbereitung und insbesondere dem Umgang mit fachtypischen Klausurformulierungen, den Operatoren (↑S. 203 ff.).
Seitenverweise geben, sofern möglich, Hinweise zu den Lösungen, die hier nicht dargestellt werden. Aufgaben, die mit dem grafikfähigen Taschenrechner oder einem Computeralgebrasystem zu bearbeiten sind, sind mit CAS gekennzeichnet.

3.1 Prüfungsaufgaben zu Funktionen

Anforderungsbereich I

- Zeichnen Sie die Parabel mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$ (↑S. 32 f.)
- Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen G_f der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$ aufgrund des Funktionsterms. (↑S. 20)
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t; 0 \le t \le 9$.
- Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 169 - x^2$. Bilden Sie die Funktion h mit $h(x) = f(g(x))$. Geben Sie $\mathbb{D}_h$ an und beschreiben Sie den Graphen von h. (↑S. 26 f.)
- Bestimmen Sie die Nullstellen der ganzrationalen Funktion $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ mithilfe einer Polynomdivision oder mittels Horner-Schema. (↑S. 25)

- CAS Skizzieren Sie die Graphen der Funktion $f_a(x) = (2x + a) \cdot e^{-\frac{x}{a}}$ mit $\mathbb{R}^{>0}$ für f_1, f_2, f_3.
- CAS Zeichnen Sie die einhüllende Geradenschar einer Parabel mithilfe der Gleichung $x_2 = t^2 + 2t(x_1 - t)$, wobei $-3{,}5 < x_1 < 3{,}5$ gilt. (↑S. 28 f.)

Anforderungsbereich II

- Erklären Sie die Beziehung $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ (↑S. 36 ff.)
- Untersuchen Sie die Zahlenfolge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4}{n} + \frac{n}{4} \right\rangle$ auf Monotonie und Beschränktheit. (↑S. 22)
- Beim Durchdringen einer Glasplatte verliert Licht 6 % seiner Intensität. Der Lichtstrahl durchdringe 8 Platten dieser Art. Wie viel Prozent seiner ursprünglichen Intensität hat er verloren? Wie viele Platten muss man aufstellen, damit die Intensität des Lichtstrahls auf 10 % der ursprünglichen Intensität absinkt? (↑S. 47)
- Das Erdbeben in der Türkei am 17. 8. 1999 hatte die Stärke 7,4 auf der Richterskala. Das Erdbeben am 26. 1. 2001 war mit 7,9 noch etwas stärker. Vergleichen Sie diese Beben mit dem Erdbeben in Los Angeles am 10. 2. 2001, das eine Stärke von 4,2 hatte. (↑S. 42 f.)
- CAS Bestimmen Sie die Definitionslücken der gebrochenrationalen Funktion $\mathbb{R}$ $f: f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 + x^3}{x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18}, x \in \mathbb{D}_{max}$ und überprüfen Sie anhand des Graphen, ob es sich jeweils um eine hebbare Definitionslücke, eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel oder eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel handelt. (↑S. 35)
- Bestimmen Sie anhand des Graphen die vollständige Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

  a) $\sin(x) = 1$ b) $\cos(x) = -0{,}5 \cdot \sqrt{3}$ (↑S. 36 ff.)

- CAS Das Pharmaunternehmen „Medibo“ bietet ein pflanzliches Präparat mit konzentrationssteigernder Wirkung an. Die Wirkung f_d (in Prozent) kann in Abhängigkeit von der Dosierung d und der Zeit x durch folgende Funktionenschar beschrieben werden:

  $f_d(x) = \frac{1}{100} \cdot d \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{20d}}$; x, d ≥ 0 (x in Minuten, d in mg).

  Skizzieren Sie die Graphen von f_d für x ≤ 240 für die Dosismenge d = 100 und d = 300. Erläutern Sie den Verlauf des Graphen und den Einfluss des Parameters d.

Anforderungsbereich III

- Beweisen Sie, dass für zwei beliebige Winkel α und β gilt: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.
  (↑S. 36 ff.)
- In einer Wäscheschleuder wird das Wasser durch die Zentrifugalkraft F mit $F = m \cdot r \cdot \omega^2$ aus der Wäsche gepresst; m bezeichnet die Masse des Wassers in der Wäsche, r den Radius der Trommel. Für die Winkelgeschwindigkeit ω gilt $\omega = 2\pi n \left[\frac{1}{s}\right]$.

  Vergleichen Sie die Schleuderleistungen bei 500 bzw. 1000 Umdrehungen pro Minute. (↑S. 34)
- Ermitteln Sie für die Funktionenschar

  $f_a : f_a(x) = \frac{ax}{ax^2 + 1}$ mit $a \in \mathbb{R}_+^0$

  Definitionsmenge, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Polstellen und Asymptoten. (↑S. 28 f.)
- CAS Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion f. Die Stützstellen können der folgenden Tabelle entnommen werden (↑S. 30):

x	0	1	4	10
y	−3	1,95	1,8	−39

A

B

D

E

F

Mathematik – Topthemen

DUDEN

Kompaktwissen für schnellen Lernerfolg

- Zur Vorbereitung und Wiederholung kurz vor der Abiturprüfung
- Zusammenfassung des Lernstoffs, übersichtlich strukturiert
- Auf einen Blick: grundlegendes Prüfungswissen
- Mit Tipps zum Lernen, zur Selbstkontrolle und für die Abiturklausur
- Mit typischen, konkreten Prüfungsfragen

Für alle Bundesländer geeignet.

ISBN 978-3-411-70665-5
9,99 € (D) · 10,30 € (A)
9 783411 706655
www.duden.de